

THAM LUẬN

A. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với 1 mặt phẳng (β) cho trước.

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm M, N, P không thẳng hàng.

Dạng 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ .

Dạng 4: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và vuông góc với mặt phẳng (β) .

Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' (Δ, Δ' chéo nhau).

Dạng 6: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và 1 điểm M.

Dạng 7: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 đường thẳng cắt nhau Δ và Δ' .

Dạng 8: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 song song Δ và Δ' .

Dạng 9: Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Phương pháp giải

1. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính của mặt cầu (S)

2. Nếu mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M \in (S)$ thì mặt phẳng (α) đi qua điểm M và có VTPT là $\overrightarrow{MI}$

3. Khi bài toán không cho tiếp điểm thì ta phải sử dụng các dữ kiện của bài toán tìm được VTPT của mặt phẳng và viết phương trình mặt phẳng có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết). Sử dụng điều kiện tiếp xúc: $d(I, (\alpha)) = R$ để tìm D.

II. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng d đi qua một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP

Dạng 2.1: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

Dạng 2.2: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d, cắt đường thẳng d'.

Dạng 3.1: Viết phương trình đường thẳng d qua M, cắt 2 đường thẳng a, b.

Dạng 3.2: Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) , cắt 2 đường thẳng a, b.

Dạng 4:

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A \in (P)$, nằm trong (P) và vuông góc với đường thẳng d.

Dạng 5: Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (P).

III. CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC TỪ NĂM 2002 ĐẾN NAY:

(Khối D_2010)

Chuẩn:

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai mp (P): $x + y + z - 3 = 0$ và (Q): $x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mp (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 1

 PVT $\vec{n}_p = (1; 1; 1)$; PVT $\vec{m}_Q = (1; -1; 1)$; PVT $\vec{k}_R = \vec{n} \wedge \vec{m} = (2; 0; -2) = 2(1; 0; -1)$

Phương trình (R) có dạng: $x - z + D = 0$. Ta có: $d(0; (R)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow D = \pm 2\sqrt{2}$

Phương trình (R): $x - z + 2\sqrt{2} = 0$ hay $x - z - 2\sqrt{2} = 0$

Nâng cao:

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $\Delta_2:$

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

$2/M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3+t; t; t) \quad \Delta_2 \begin{cases} \text{qua } A(2; 1; 0) \\ \text{1 VTCP } \vec{a}_2 = (2; 1; 2) \end{cases}$

Ta có: $\vec{AM} = (1+t; t-1; t) \Rightarrow [\vec{a}_2, \vec{AM}] = (2-t; 2; t-3)$; $d(M; \Delta_2) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(2-t)^2 + 4 + (t-3)^2}}{\sqrt{4+1+4}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2t^2 - 10t + 17} = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow M(4; 1; 1) \\ t = 4 \Rightarrow M(7; 4; 4) \end{cases}$

1. (Khởi D_2009)

Chuẩn:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(2; 1; 0)$, $B(1; 2; 2)$, $C(1; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

Nâng cao:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

2. (1,0 điểm) Xác định tọa độ điểm D...

$\vec{AB} = (-1; 1; 2)$, phương trình AB: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t. \end{cases}$

D thuộc đường thẳng AB $\Rightarrow D(2-t; 1+t; 2t) \Rightarrow \vec{CD} = (1-t; t; 2t)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

C không thuộc mặt phẳng (P).

$CD \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{CD} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (1-t) + 1 \cdot t + 1 \cdot 2t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$. Vậy $D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$.

2. (1,0 điểm) Viết phương trình đường thẳng...

$$\text{Toạ độ giao điểm } I \text{ của } \Delta \text{ với } (P) \text{ thỏa mãn hệ: } \begin{cases} \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1} \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases} \Rightarrow I(-3;1;1).$$

Vector pháp tuyến của (P) : $\vec{n} = (1;2;-3)$; vector chỉ phương của Δ : $\vec{u} = (1;1;-1)$.

Đường thẳng d cần tìm qua I và có vector chỉ phương $\vec{v} = [\vec{n}, \vec{u}] = (1;-2;-1)$.

$$\text{Phương trình } d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

ĐS: Chuẩn $D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$, Nâng cao $d \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

2. (Khối D_2008)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(3;3;0)$, $B(3;0;3)$, $C(0;3;3)$, $D(3;3;3)$.

- Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

1	Viết phương trình mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, D (1,00 điểm)
	Phương trình mặt cầu cần tìm có dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ (*), trong đó $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ (**). Thay tọa độ của các điểm A, B, C, D vào (*) ta được hệ phương trình $\begin{cases} 6a + 6b + d = -18 \\ 6a + 6c + d = -18 \\ 6b + 6c + d = -18 \\ 6a + 6b + 6c + d = -27. \end{cases}$ Giải hệ trên và đối chiếu với điều kiện (**) ta được phương trình mặt cầu là $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$.
2	Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (1,00 điểm)
	Mặt cầu đi qua A, B, C, D có tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Gọi phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C là $mx + ny + pz + q = 0$ ($m^2 + n^2 + p^2 > 0$). Thay tọa độ các điểm A, B, C vào phương trình trên ta được $\begin{cases} 3m + 3n + q = 0 \\ 3m + 3p + q = 0 \\ 3n + 3p + q = 0 \end{cases} \Rightarrow 6m = 6n = 6p = -q \neq 0.$ Do đó phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + y + z - 6 = 0$. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là hình chiếu vuông góc H của điểm I trên mặt phẳng (ABC). Phương trình đường thẳng IH: $\frac{x - \frac{3}{2}}{1} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1} = \frac{z - \frac{3}{2}}{1}$. Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z - 6 = 0 \\ x - \frac{3}{2} = y - \frac{3}{2} = z - \frac{3}{2} \end{cases}$. Giải hệ trên ta được $H(2;2;2)$.

ĐS: a. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z = 0$, b. $H(2;2;2)$.

3. (Khối D_2007)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}.$$

- a. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) .
b. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

1	Viết phương trình đường thẳng d ... (1,00 điểm)
	Tọa độ trọng tâm: $G(0; 2; 2)$.
	Ta có: $\overrightarrow{OA} = (1; 4; 2), \overrightarrow{OB} = (-1; 2; 4)$.
	Vector chỉ phương của d là: $\vec{n} = (12; -6; 6) = 6(2; -1; 1)$.
	Phương trình đường thẳng d : $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$.
2	Tìm tọa độ điểm M... (1,00 điểm)
	Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(1-t; -2+t; 2t)$
	$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = (t^2 + (6-t)^2 + (2-2t)^2) + ((-2+t)^2 + (4-t)^2 + (4-2t)^2)$
	$= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28.$
	$MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = 2$.
	Khi đó $M(-1; 0; 4)$.

ĐS: a. $d: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$, b. $M(-1; 0; 4)$.

4. (Khối D_2006)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}, d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

- a. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1 .
b. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 .

1	Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua d_1 (1,00 điểm)
	Mặt phẳng (α) đi qua $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với d_1 có phương trình là: $2(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0.$
	Tọa độ giao điểm H của d_1 và (α) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(0; -1; 2).$
	Vì A' đối xứng với A qua d_1 nên H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-1; -4; 1)$.
2	Viết phương trình đường thẳng Δ (1,00 điểm)
	Vì Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 , nên Δ đi qua giao điểm B của d_2 và (α) .
	Tọa độ giao điểm B của d_2 và (α) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B(2; -1; -2).$
	Vector chỉ phương của Δ là: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1; -3; -5)$.
	Phương trình của Δ là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

ĐS:

a. $A'(-1; -4; 1)$, b. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

5. (Khối D_2005)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 12 - 3t \\ y = t \\ z = 10 - 2t \end{cases}.$$

- a. Chứng minh d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .
b. Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B . Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

III.2a	d_1 đi qua $M_1(1; -2; -1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (3; -1; 2)$. d_2 có vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3; -1; 2)$. Vì $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ và $M_1 \notin d_2$ nên $d_1 \parallel d_2$. Mặt phẳng (P) chứa d_2 nên có phương trình dạng $\alpha(x + y - z - 2) + \beta(x + 3y - 12) = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$ Vì $M_1 \in (P)$ nên $\alpha(1 - 2 + 1 - 2) + \beta(1 - 6 - 12) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 17\beta = 0$. Chọn $\alpha = 17 \Rightarrow \beta = -2$. Phương trình (P) là: $15x + 11y - 17z - 10 = 0.$
III.2b	Vì $A, B \in Oxz$ nên $y_A = y_B = 0$. Vì $A \in d_1$ nên $\frac{x_A - 1}{3} = \frac{z_A + 1}{-1} = \frac{z_A + 1}{2} \Rightarrow x_A = z_A = -5, \Rightarrow A(-5; 0; -5)$ $B \in d_2 \Rightarrow \begin{cases} x_B - z_B - 2 = 0 \\ x_B - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 12 \\ z_B = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12; 0; 10)$. $\vec{OA} = (-5; 0; -5), \vec{OB} = (12; 0; 10) \Rightarrow [\vec{OA}, \vec{OB}] = (0; -10; 0)$. $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} [\vec{OA}, \vec{OB}] = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ (đvdt).

ĐS: a. $15x + 11y - 17z - 10 = 0$, b. $S_{\Delta OAB} = 5$.

6. (Khối D 2004)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

3	Viết phương trình mặt cầu (1,0 điểm) I(x; y; z) là tâm mặt cầu cần tìm $\Leftrightarrow I \in (P)$ và $IA = IB = IC$. Ta có: $IA^2 = (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2$; $IB^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$; $IC^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2.$ Suy ra hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = z = 1; y = 0$. $R = IA = 1 \Rightarrow$ Phương trình mặt cầu là $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.
----------	---

ĐS: $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

7. (Khối D 2003)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng d_k là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + 3ky - z + 2 = 0$, $(\beta): kx - y + z + 1 = 0$. Tìm k để đường thẳng d_k Vuông góc với mặt phẳng (P): $x - y - 2z + 5 = 0$.

Ta có cặp vector pháp tuyến của hai mặt phẳng xác định d_k là $\vec{n}_1 = (1; 3k; -1)$

và $\vec{n}_2 = (k; -1; 1)$. Vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1; -1; -2)$.

Đường thẳng d_k có vector chỉ phương là:

$$\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (3k - 1; -k - 1; -1 - 3k^2) \neq \vec{0} \quad \forall k.$$

Nên $d_k \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{3k - 1}{1} = \frac{-k - 1}{-1} = \frac{-1 - 3k^2}{-2} \Leftrightarrow k = 1.$

Vậy giá trị k cần tìm là $k = 1$.

ĐS: $k = 1$.

8. (Khối D 2002)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng d_m là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): (2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0$, $(\beta): mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0$. Tìm m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

ĐS: $m = -\frac{1}{2}$.

Cách 1:

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}(2; -1; 0)$. Đường thẳng d_m có vector chỉ phương $\vec{u}((1-m)(2m+1); -(2m+1)^2; -m(1-m))$.

Suy ra $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3(2m+1)$.

$$d_m \text{ song song với } (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ d_m \not\subset (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \exists A \in d_m, A \notin (P) \end{cases}$$

Ta có : điều kiện $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Mặt khác khi $m = -1/2$ thì d_m có phương trình : $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, mọi điểm $A(0; 1; a)$ của đường thẳng này đều không nằm trong (P), nên điều kiện $\exists A \in d_m, A \notin (P)$ được thỏa mãn. ĐS : $m = -1/2$

Cách 2:

Viết phương trình d_m dưới dạng tham số ta được

$$\begin{cases} x = (1-m)(2m+1)t \\ y = 1 - (2m+1)^2 t \\ z = -2 - m(1-m)t. \end{cases}$$

$$d_m // (P) \Leftrightarrow \text{hệ phương trình ẩn } t \text{ sau } \begin{cases} x = (1-m)(2m+1)t \\ y = 1 - (2m+1)^2 t \\ z = -2 - m(1-m)t \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t sau $3(2m+1)t + 1 = 0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow m = -1/2$

Cách 3:

$d_m // (P) \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn x, y, z sau

$$(H) \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ (2m+1)x + (1-x)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

vô nghiệm

Từ 2 phương trình đầu của hệ phương trình trên suy ra $\begin{cases} x = \frac{m-1}{3} \\ y = \frac{2m+4}{3} \end{cases}$

Thế x, y tìm được vào phương trình thứ ba ta có :

$$(2m+1)z = -\frac{1}{3}(m^2 + 11m + 6)$$

Hệ (H) vô nghiệm $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

(Khối B_2010)

Chuẩn:

Trong không gian tọa độ Oxyz, cho các điểm A (1; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c), trong đó b, c dương và mặt phẳng (P): $y - z + 1 = 0$. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

A (1; 0; 0); B (0; b; 0); C (0; 0; c) với b, c > 0

$$\Rightarrow (ABC) : \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow (ABC) : bc.x + cy + bz - bc = 0$$

$$\text{Vì } d(O; ABC) = \frac{1}{3} \text{ nên } \frac{bc}{\sqrt{b^2c^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3b^2c^2 = b^2c^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2b^2c^2 \quad (1)$$

$$(P) : y - z + 1 = 0 \text{ có VTPT là } \vec{n_p} = (0; 1; -1)$$

(ABC) có VTPT là $\vec{n} = (bc; c; b)$

Vì (P) vuông góc với (ABC) $\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_p \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_p = 0 \Rightarrow c - b = 0$ (2)

Từ (1), (2) và $b, c > 0$ suy ra : $b = c = 1$

Nâng cao:

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM.

$$d(M; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{NM}, \vec{a}_\Delta|}{|\vec{a}_\Delta|}. M \in Ox \Leftrightarrow M(m; 0; 0)$$

Δ qua N (0; 1; 0) có VTCP $\vec{a} = (2; 1; 2)$

$$\overrightarrow{NM} = (m; -1; 0) \Rightarrow [\vec{a}, \overrightarrow{NM}] = (2; 2m; -2 - m)$$

$$\text{Ta có: } d(M, \Delta) = OM \Leftrightarrow \frac{|[\vec{a}, \overrightarrow{NM}]|}{|\vec{a}|} = OM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3} = |m|$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hay } m = 2. \text{ Vậy } M(-1; 0; 0) \text{ hay } M(2; 0; 0)$$

9. (Khối B_2009)

Chuẩn:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện ABCD có các đỉnh A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1) và D(0;3;1). Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Nâng cao:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm A(-3;0;1), B(1;-1;3). Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

2. (1,0 điểm) Viết phương trình mặt phẳng (P)...

Mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (P) qua A, B và song song với CD.

Vectơ pháp tuyến của (P): $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3; -1; 2), \overrightarrow{CD} = (-2; 4; 0) \Rightarrow \vec{n} = (-8; -4; -14). \text{ Phương trình (P): } 4x + 2y + 7z - 15 = 0.$$

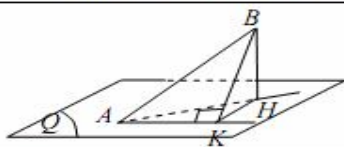
Trường hợp 2: (P) qua A, B và cắt CD. Suy ra (P) cắt CD tại trung điểm I của CD.

$$I(1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (4; 1; 0); \text{ vectơ pháp tuyến của (P): } \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (2; 0; 3).$$

$$\text{Phương trình (P): } 2x + 3z - 5 = 0.$$

$$\text{Vậy (P): } 4x + 2y + 7z - 15 = 0 \text{ hoặc (P): } 2x + 3z - 5 = 0.$$

2. (1,0 điểm) Viết phương trình đường thẳng...



Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P) .

Phương trình $(Q): x - 2y + 2z + 1 = 0$.

K, H là hình chiếu của B trên $\Delta, (Q)$. Ta có $BK \geq BH$ nên AH là đường thẳng cần tìm.

Toạ độ $H = (x; y; z)$ thoả mãn:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2} \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow H = \left(-\frac{1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right).$$

$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{2}{9}\right)$. Vậy, phương trình $\Delta: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

ĐS: Chuẩn $(P): 2x+3z-5=0$, Nâng cao $\Delta: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

10. (Khối B_2008)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;0;1)$.

- Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C .
- Tìm tọa độ của điểm M thuộc mặt phẳng $2x+2y+z-3=0$ sao cho $MA=MB=MC$.

1	Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C (1,00 điểm)
	Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1), \overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1)$, tích có hướng của hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ là $\vec{n} = (2; 4; -8)$.
	Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C nhận $\vec{n}$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình $2(x-0) + 4(y-1) - 8(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4z + 6 = 0$.
2	Tìm tọa độ của điểm M ... (1,00 điểm)
	Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên điểm M thuộc đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại trung điểm $I(0; -1; 1)$ của BC .
	Tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-4} \end{cases}$
	Suy ra $M(2; 3; -7)$.

ĐS:

a. $x+2y-4z+6=0$, b. $M(2;3;-7)$.

11. (Khối B_2007)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-14=0$.

- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.
- Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

1	Viết phương trình mặt phẳng (Q) (1,00 điểm)
	(S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$ có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$. Mặt phẳng (Q) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $R = 3$ nên (Q) chứa I. (Q) có cặp vector chỉ phương là: $\vec{OI} = (1; -2; -1)$, $\vec{i} = (1; 0; 0)$. $\Rightarrow$ Vector pháp tuyến của (Q) là: $\vec{n} = (0; -1; 2)$. Phương trình của (Q) là: $0.(x-0) - 1.(y-0) + 2.(z-0) = 0 \Leftrightarrow y - 2z = 0$.
2	Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu sao cho khoảng cách lớn nhất (1,00 điểm)
	Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P). Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B. Nhận xét: nếu $d(A; (P)) \geq d(B; (P))$ thì $d(M; (P))$ lớn nhất khi $M \equiv A$. Phương trình đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Tọa độ giao điểm của d và (S) là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{cases}$ Giải hệ ta tìm được hai giao điểm A $(-1; -1; -3)$, B $(3; -3; 1)$. Ta có: $d(A; (P)) = 7 \geq d(B; (P)) = 1$. Vậy khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất khi $M(-1; -1; -3)$.

ĐS: a. $y-2z=0$, b. $M(-1; -1; -3)$.

12. (Khối B 2006)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0; 1; 2)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}, \quad d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$$

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với d_1, d_2 .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc d_1 , N thuộc d_2 sao cho A, M, N thẳng hàng.

1	Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, song song với d_1 và d_2 (1,00 điểm)
	Vector chỉ phương của d_1 và d_2 lần lượt là: $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$ và $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$. $\Rightarrow$ vector pháp tuyến của (P) là: $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; -3; -5)$. Vì (P) qua $A(0; 1; 2) \Rightarrow (P): x + 3y + 5z - 13 = 0$. Do $B(0; 1; -1) \in d_1, C(1; -1; 2) \in d_2$, nhưng $B, C \notin (P)$, nên $d_1, d_2 \parallel (P)$. Vậy, phương trình mặt phẳng cần tìm là (P): $x + 3y + 5z - 13 = 0$.
2	Tìm tọa độ các điểm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho A, M, N thẳng hàng (1,00 điểm)
	Vì $M \in d_1, N \in d_2$ nên $M(2m; 1+m; -1-m), N(1+n; -1-2n; 2+n)$ $\Rightarrow \vec{AM} = (2m; m; -3-m); \vec{AN} = (1+n; -2-2n; n)$. $\Rightarrow [\vec{AM}, \vec{AN}] = (-mn - 2m - 6n - 6; -3mn - m - 3n - 3; -5mn - 5m)$ A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow [\vec{AM}, \vec{AN}] = \vec{0}$ $\Leftrightarrow m = 0, n = -1 \Rightarrow M(0; 1; -1), N(0; 1; 1)$.

ĐS: a. (P): $x+3y+5z-13=0$, b. $M(0; 1; -1), N(0; 1; 1)$.

13. (Khối B 2005)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với $A(0; -3; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(0; 3; 0)$, $B(4; 0; 4)$.

- Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1 . Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCB_1C_1) .
- Gọi M là trung điểm của A_1B_1 . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1 . Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A_1C_1 tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN.

ĐS:

$$MN = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

III.2b	Ta có $M\left(2; -\frac{3}{2}; 4\right)$, $\overline{AM} = \left(2; \frac{3}{2}; 4\right)$, $\overline{BC_1} = (-4; 3; 4)$. Vector pháp tuyến của (P) là $\overline{n_p} = [\overline{AM}, \overline{BC_1}] = (-6; -24; 12)$. Phương trình (P): $-6x - 24(y + 3) + 12z = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0$. Ta thấy $B(4; 0; 0) \notin (P)$. Do đó (P) đi qua A, M và song song với $\overline{BC_1}$. Ta có $\overline{A_1C_1} = (0; 6; 0)$. Phương trình tham số của đường thẳng A_1C_1 là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4. \end{cases}$ $N \in A_1C_1 \Rightarrow N(0; -3 + t; 4)$. Vì $N \in (P)$ nên $0 + 4(-3 + t) - 8 + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Vậy $N(0; -1; 4)$. $MN = \sqrt{(2-0)^2 + \left(-\frac{3}{2} + 1\right)^2 + (4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$
---------------	--

14. (Khối B_2004)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(-4; -2; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

ĐS: $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$

3	Viết phương trình đường thẳng Δ (1,0 điểm)
	Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2; -1; 4)$. $B \in d \Leftrightarrow B(-3 + 2t; 1 - t; -1 + 4t)$ (với một số thực t nào đó). $\Rightarrow \overline{AB} = (1 + 2t; 3 - t; -5 + 4t)$. $AB \perp d \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - (3 - t) + 4(-5 + 4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. $\Rightarrow \overline{AB} = (3; 2; -1) \Rightarrow$ Phương trình của $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

15. (Khối B_2003)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 8)$ và điểm C sao cho $\overline{AC} = (0; 6; 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

Từ $\overline{AC} = (0; 6; 0)$ và $A(2; 0; 0)$ suy ra $C(2; 6; 0)$, do đó $I(1; 3; 4)$.

Phương trình mặt phẳng (α) qua I và vuông góc với OA là: $x - 1 = 0$.

$\Rightarrow$ tọa độ giao điểm của (α) với OA là $K(1; 0; 0)$.

ĐS: Khoảng cách bằng 5 $\Rightarrow$ khoảng cách từ I đến OA là $IK = \sqrt{(1-1)^2 + (0-3)^2 + (0-4)^2} = 5$.

16. (Khối A_2010)

Chuẩn

1. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P) : $x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ . Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC = \sqrt{6}$.

Nâng cao

2. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0; 0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ . Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$.

$$C(1+2t; t; -2-t) \in \Delta$$

$$C \in (P) \Rightarrow (1+2t) - 2t - 2 - t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow C(-1; -1; -1)$$

$$M(1+2t; t; -2-t)$$

$$MC^2 = 6 \Leftrightarrow (2t+2)^2 + (t+1)^2 + (-t-1)^2 = 6 \Leftrightarrow 6(t+1)^2 = 6 \Leftrightarrow t+1 = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ hay } t = -2$$

$$\text{Vậy } M_1(1; 0; -2); M_2(-3; -2; 0)$$

$$d(M_1, (P)) = \frac{|1-0-2|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}; d(M_2, (P)) = \frac{|-3+4+0|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Delta \text{ qua } M(-2; 2; -3), \text{ VTCP } \vec{a} = (2; 3; 2); \vec{AM} = (-2; 2; -1)$$

$$\Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{AM} = (-7; -2; 10) \Rightarrow d(A, \Delta) = \frac{|\vec{a} \wedge \vec{AM}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{49+4+100}}{\sqrt{4+9+4}} = \sqrt{\frac{153}{17}} = 3$$

Vẽ BH vuông góc với Δ

$$\text{Ta có : } BH = \frac{BC}{2} = 4. \Delta AHB \Rightarrow R^2 = 16 + \frac{153}{17} = \frac{425}{17} = 25$$

$$\text{Phương trình (S) : } x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$$

17. (Khối A_2009)

Chuẩn:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Chứng minh rằng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

Nâng cao:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-1=0$ và hai đường

$$\text{thẳng } \Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}, \Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}. \text{ Xác định tọa độ điểm } M \text{ thuộc đường}$$

thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

$$\text{ĐS: Chuẩn } H(3;0;2), r=4. \text{ Nâng cao } M_1(0;1;-3), M_2\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right).$$

(S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Khoảng cách từ I đến (P) : $d(I, (P)) = \frac{|2 - 4 - 3 - 4|}{3} = 3 < R$; suy ra đpcm.

Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn giao tuyến,

H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) : $IH = d(I, (P)) = 3$, $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$.

$$\text{Toạ độ } H = (x; y; z) \text{ thoả mãn: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \\ 2x - 2y - z - 4 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ, ta được $H(3; 0; 2)$.

Δ_2 qua $A(1; 3; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(-1 + t; t; -9 + 6t)$.

$$\overline{MA} = (2 - t; 3 - t; 8 - 6t), [\overline{MA}, \vec{u}] = (8t - 14; 20 - 14t; t - 4) \Rightarrow \left| [\overline{MA}, \vec{u}] \right| = 3\sqrt{29t^2 - 88t + 68}.$$

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến } \Delta_2: d(M, \Delta_2) = \frac{\left| [\overline{MA}, \vec{u}] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}.$$

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến } (P): d(M, (P)) = \frac{|-1 + t - 2t + 12t - 18 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11t - 20|}{3}.$$

$$\sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{|11t - 20|}{3} \Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = \frac{53}{35}.$$

$$t = 1 \Rightarrow M(0; 1; -3); t = \frac{53}{35} \Rightarrow M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right).$$

18. (Khối A_2008)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d .
- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(2; 1; 2)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d , suy ra $H(1 + 2t; t; 2 + 2t)$ và $\overline{AH} = (2t - 1; t - 5; 2t - 1)$.

$$\text{Vì } AH \perp d \text{ nên } \overline{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) + t - 5 + 2(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra $H(3; 1; 4)$.

Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d sao cho... (1,00 điểm)

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (α).

Ta có $d(A, (\alpha)) = AK \leq AH$ (tính chất đường vuông góc và đường xiên). Do đó khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi và chỉ khi $AK = AH$, hay $K \equiv H$.

Suy ra (α) qua H và nhận vector $\overrightarrow{AH} = (1; -4; 1)$ làm vector pháp tuyến.

Phương trình của (α) là

$$1(x-3) - 4(y-1) + 1(z-4) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0.$$

ĐS: a. $H(3;1;4)$, (α): $x-4y+z-3=0$.

19. (Khối A_2007)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}.$$

- Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.
- Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): $7x+y-4z=0$ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 .

Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau (1,00 điểm)

+) d_1 qua $M(0; 1; -2)$, có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2; -1; 1)$,

d_2 qua $N(-1; 1; 3)$, có vector chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2; 1; 0)$.

+) $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (-1; 2; 4)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; 0; 5)$.

+) $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{MN} = 21 \neq 0 \Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau.

Viết phương trình đường thẳng d (1,00 điểm)

Giả sử d cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A, B. Vì $A \in d_1, B \in d_2$ nên

$$A(2s; 1-s; -2+s), B(-1+2t; 1+t; 3).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2t-2s-1; t+s; -s+5).$$

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (7; 1; -4)$.

$AB \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2t-2s-1}{7} = \frac{t+s}{1} = \frac{-s+5}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t+9s+1=0 \\ 4t+3s+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(2; 0; -1), B(-5; -1; 3).$$

ĐS: $d: \frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$ Phương trình của d là: $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$.

20. (Khối A_2006)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

- Tính khoảng cách giữa đường thẳng $A'C$ và MN.
- Viết phương trình mặt phẳng chứa $A'C$ và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

1	Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN (1,00 điểm) Gọi (P) là mặt phẳng chứa $A'C$ và song song với MN. Khi đó: $d(A'C, MN) = d(M, (P)).$ Ta có: $C(1; 1; 0), M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ $\overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1), \overrightarrow{MN} = (0; 1; 0)$ $[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1; 0; 1).$ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A'(0; 0; 1)$, có vector pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0; 1)$, có phương trình là: $1.(x - 0) + 0.(y - 0) + 1.(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + z - 1 = 0$. Vậy $d(A'C, MN) = d(M, (P)) = \frac{\left \frac{1}{2} + 0 - 1\right }{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$
2	Viết phương trình mặt phẳng (1,00 điểm) Gọi mặt phẳng cần tìm là $(Q): ax + by + cz + d = 0 \ (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$. Vì (Q) đi qua $A'(0; 0; 1)$ và $C(1; 1; 0)$ nên: $\begin{cases} c + d = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = -d = a + b.$ Do đó, phương trình của (Q) có dạng: $ax + by + (a + b)z - (a + b) = 0.$ Mặt phẳng (Q) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; a + b)$, mặt phẳng Oxy có vector pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Vì góc giữa (Q) và Oxy là α mà $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ nên $\cos(\vec{n}, \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\Leftrightarrow \frac{ a + b }{\sqrt{a^2 + b^2 + (a + b)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow 6(a + b)^2 = 2(a^2 + b^2 + ab)$ $\Leftrightarrow a = -2b \text{ hoặc } b = -2a.$ Với $a = -2b$, chọn $b = -1$, được mặt phẳng $(Q_1): 2x - y + z - 1 = 0$. Với $b = -2a$, chọn $a = 1$, được mặt phẳng $(Q_2): x - 2y - z + 1 = 0$.

ĐS: a. $d(A'C, MN) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, (Q_1): 2x - y + z - 1 = 0, (Q_2): x - 2y - z + 1 = 0.$

21. (Khối A_2005)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$.

- Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.
- Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , biết Δ đi qua A và vuông góc với d .

ĐS: a. $I_1(-3; 5; 7), I_2(3; -7; 1)$

III.2a

Phương trình của tham số của d :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

$$I \in d \Rightarrow I(1 - t; -3 + 2t; 3 + t), \quad d(I, (P)) = \frac{|-2t + 2|}{3}.$$

$$d(I, (P)) = 2 \Leftrightarrow |1 - t| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -2. \end{cases}$$

Vậy có hai điểm $I_1(-3; 5; 7)$, $I_2(3; -7; 1)$.

III.2b

Vì $A \in d$ nên $A(1 - t; -3 + 2t; 3 + t)$.

$$\text{Ta có } A \in (P) \Leftrightarrow 2(1 - t) + (-3 + 2t) - 2(3 + t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy $A(0; -1; 4)$.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$.

Đường thẳng d có vector chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

Vì $\Delta \subset (P)$ và $\Delta \perp d$ nên Δ có vector chỉ phương $\vec{u}_{\Delta} = [\vec{n}, \vec{u}] = (5; 0; 5)$.

Phương trình tham số của Δ :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t. \end{cases}$$

22. (Khối A_2004)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O . Biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC

a. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA , BM .

b. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N . Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.

III.2.a (1,0 điểm)

+ Ta có: $C(-2; 0; 0)$, $D(0; -1; 0)$, $M(-1; 0; \sqrt{2})$,
 $\vec{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$, $\vec{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$.

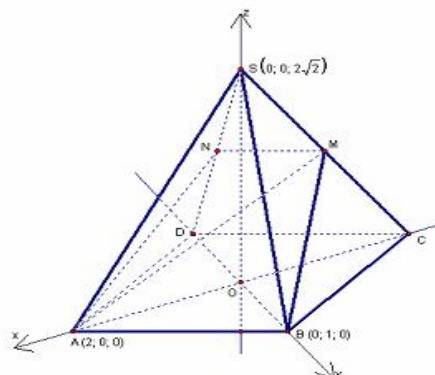
Gọi α là góc giữa SA và BM .

Ta được: $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{SA}, \vec{BM}) \right| = \frac{|\vec{SA} \cdot \vec{BM}|}{|\vec{SA}| \cdot |\vec{BM}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

+ Ta có: $[\vec{SA}, \vec{BM}] = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$, $\vec{AB} = (-2; 1; 0)$.

Vậy:

$$d(SA, BM) = \frac{|[\vec{SA}, \vec{BM}] \cdot \vec{AB}|}{|[\vec{SA}, \vec{BM}]|} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$



III.2.b	(1,0 điểm)
Ta có $MN \parallel AB \parallel CD \Rightarrow N$ là trung điểm $SD \Rightarrow N\left(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$.	
$\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2}), \overrightarrow{SM} = (-1; 0; -\sqrt{2}), \overrightarrow{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2}), \overrightarrow{SN} = \left(0; -\frac{1}{2}; -\sqrt{2}\right)$ $\Rightarrow [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = (0; 4\sqrt{2}; 0)$.	
$V_{S.ABM} = \frac{1}{6} [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$	
$V_{S.AMN} = \frac{1}{6} [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SN} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$	

ĐS: a. $d(SA, BM) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, b. $V_{S.AMN} = \sqrt{2}$.

23. (Khối A 2002)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

- Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 .
- Cho điểm $M(2;1;4)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

2a)

Cách I. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 có dạng:

$$\alpha(x-2y+z-4) + \beta(x+2y-2z+4) = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)x - (2\alpha - 2\beta)y + (\alpha - 2\beta)z - 4\alpha + 4\beta = 0$$

Vậy $\vec{n}_P = (\alpha + \beta; -2\alpha + 2\beta; \alpha - 2\beta)$. Ta có $\vec{u}_2 = (1;1;2) // \Delta_2$ và $M_2(1;2;1) \in \Delta_2$

$$(P) // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_P \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ M_2(1;2;1) \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ M_2 \notin (P) \end{cases} \text{ Vậy } (P): 2x - z = 0$$

Cách II Ta có thể chuyển phương trình Δ_1 sang dạng tham số như sau:

$$\text{Từ phương trình } \Delta_1 \text{ suy ra } 2x - z = 0. \text{ Đặt } x = 2t' \Rightarrow \Delta_1: \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3t' - 2 \\ z = 4t' \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1(0; -2; 0) \in \Delta_1, \vec{u}_1 = (2; 3; 4) // \Delta_1.$$

(Ta có thể tìm tọa độ điểm $M_1 \in \Delta_1$ bằng cách cho $x = 0 \Rightarrow y = -2, z = 0$)

$$\text{và tính } \vec{u}_1 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2; 3; 4).$$

Ta có $\vec{u}_2 = (1; 1; 2) // \Delta_2$. Từ đó ta có véc tơ pháp của mặt phẳng (P) là:

$$\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 0; -1). \text{ Vậy phương trình mặt phẳng } (P) \text{ đi qua } M_1(0; -2; 0)$$

$$\text{và } \perp \vec{n}_P = (2; 0; -1) \text{ là: } 2x - z = 0.$$

$$\text{Mặt khác } M_2(1; 2; 1) \notin (P) \Rightarrow \text{phương trình mặt phẳng cần tìm là: } 2x - z = 0$$

2b)

b) **Cách I.** $H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1+t, 2+t, 1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (t-1; t+1; 2t-3)$
 $\Rightarrow MH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5}$
 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3)$
Cách II. $H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1+t; 2+t; 1+2t)$.
 MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 4)$

ĐS: a. $2x-z=0$, b. $H(2; 3; 4)$

24. (CD_Khối A_2009)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các mặt phẳng $(P_1): x+2y+3z+4=0$ và $(P_2): 3x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 1; 1)$, vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .

- (P_1) có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$.
- (P_2) có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (3; 2; -1)$.
- (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (4; -5; 2)$.

ĐS: $(P): 4x-5y+2z-1=0$ ((P) qua $A(1; 1; 1)$ nên $(P): 4x-5y+2z-1=0$).

25. (CD_Khối A_2008)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 1; 3)$ và đường thẳng d có phương trình

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

- a. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d .
- b. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MOA cân tại đỉnh O .

ĐS: a. $x-y+2z-6=0$

1	Viết phương trình mặt phẳng (P) ... (1,00 điểm)
	Vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (1; -1; 2)$.
	Do (P) vuông góc với d nên (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (1; -1; 2)$.
	Phương trình mặt phẳng (P) là: $1.(x-1) - 1.(y-1) + 2.(z-3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 6 = 0.$
2	Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho ΔMOA cân tại đỉnh O (1,00 điểm)
	+) $M \in d \Rightarrow M(t; -t; 1+2t)$.
	+) ΔMOA cân tại đỉnh $O \Leftrightarrow OM = OA$ và M, O, A không thẳng hàng.
	$OM = OA \Leftrightarrow t^2 + t^2 + (2t+1)^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{5}{3}.$
	+) Với $t = 1$ ta có $M(1; -1; 3)$. Với $t = -\frac{5}{3}$ ta có $M\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.
	+) Thử lại: cả hai điểm M tìm được đều thỏa mãn điều kiện M, O, A không thẳng hàng.
	Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M_1(1; -1; 3)$ và $M_2\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

b. $M_1(1; -1; 3), M_2\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

BÀI TẬP:

Bài 1: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$ và điểm $M(-1; -3; -2)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua sao cho (P) cắt (S) theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Ta thấy M thuộc miền trong của (S) và (S) có tâm $I(-1; -2; -3)$, $R = \sqrt{14}$. Do đó, (P) qua M cắt (S) theo một giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow \sqrt{R^2 - IH^2} \text{ nhỏ nhất (H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P))}$$

$$\Leftrightarrow IH \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow M \equiv H \Leftrightarrow \overline{IM} = (0; 1; -1) \text{ là VTPT của (P).}$$

Vậy (P) có phương trình là $y - z + 1 = 0$.

Bài 2: Trong kg Oxyz cho đường thẳng (Δ): $x = -t$; $y = 2t - 1$; $z = t + 2$ và mp(P): $2x - y - 2z - 2 = 0$

Viết PT mặt cầu(S) có tâm $I \in \Delta$ và khoảng cách từ I đến mp(P) là 2 và mặt cầu(S) cắt mp(P) theo giao tuyến đường tròn (C) có bán kính $r = 3$

Bg: m cầu(S) có tâm $I \in \Delta$ g sử $I(a; b; c) \Rightarrow (a; b; c)$ thỏa mãn PT của Δ (1)

$$* d(I; (P)) = 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ

$$\text{PT: } \begin{cases} |2a - b - 2c - 2| = 6 \\ \frac{a = t}{b = 2t - 1} \\ c = t + 2 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{hecongkiem} \left(\frac{11}{6}; -\frac{14}{3}; \frac{1}{6} \right); \text{va} \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{7}{3} \right)$$

$$\text{Do } r = \sqrt{R^2 - 4} = 3 \Leftrightarrow R = \sqrt{13}$$

$$(S_1): \left(x - \frac{11}{6} \right)^2 + \left(y + \frac{14}{3} \right)^2 + \left(z - \frac{1}{6} \right)^2 = 13$$

Vậy có 2 mặt cầu theo ycbt :

$$(S_2): \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{3} \right)^2 + \left(z - \frac{7}{3} \right)^2 = 13$$

Bài 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ a

$$d_2: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Xét vị trí tương đối của d_1 và d_2 . Viết phương trình đường thẳng qua O, cắt d_2 và vuông góc với d_1

*₂ đường thẳng chéo nhau

$$* \text{đường thẳng } \Delta \text{ cần tìm cắt } d_2 \text{ tại } A(-1-2t; t; 1+t) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (-1-2t; t; 1+t)$$

$$\Delta \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow A(1; -1; 0) \quad \text{Ptts } \Delta \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Bài 4: Trong không gian Oxyz cho hai điểm A (-1; 3; -2), B (-3; 7; -18) và mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$

a. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mp (P).

b. Tìm tọa độ điểm M $\in$ (P) sao cho MA + MB nhỏ nhất

Phương trình mp(Q) chứa AB và vuông góc với (P) là :

$$2(x + 1) + 5(y - 3) + 1(z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5y + z - 11 = 0$$

b. Tìm M $\in$ (P) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

Vì khoảng cách đại số của A và B cùng dấu nên A, B ở cùng phía với Mp (P)

. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) ; Pt AA' : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}$

AA' cắt (P) tại H, tọa độ H là nghiệm của ;

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow H(1, 2, -1)$$

Vì H là trung điểm của AA' nên ta có :

$$\begin{cases} 2x_H = x_A + x_{A'} \\ 2y_H = y_A + y_{A'} \\ 2z_H = z_A + z_{A'} \end{cases} \Rightarrow A'(3, 1, 0)$$

Ta có $\overline{A'B} = (-6, 6, -18)$ (cùng phương với $(1; -1; 3)$) Pt đường thẳng A'B :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$$

Vậy tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} \end{cases} \Rightarrow M(2, 2, -3)$$

Bài 5: Trong không gian (Oxyz), lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm

A(2; -1; 0), B(5; 1; 1) và khoảng cách từ điểm M(0; 0; $\frac{1}{2}$) đến mặt phẳng (α) bằng $\frac{7}{6\sqrt{3}}$

$$2. x + y - 5z - 1 = 0; 5x - 17y + 19z - 27 = 0$$

Bài 6: Trong không gian (Oxyz), cho ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), (a, b, c > 0)

và luôn thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Xác định a, b, c sao cho khoảng cách từ điểm O(0; 0; 0) đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất.

Bài 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho bốn điểm A(4; 5; 6); B(0; 0; 1); C(0; 2; 0); D(3; 0; 0). Chứng minh các đường thẳng AB và CD chéo nhau. Viết phương trình đường thẳng (D) vuông góc với mặt phẳngOxy và cắt các đường thẳngAB; CD

Bài 8: Trong hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) có phương trình là:

(S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$, (P): $2x + 2y - z + 16 = 0$. Điểm M di động trên (S) và điểm N di động trên (P). Tính độ dài ngắn nhất của đoạn thẳng MN. Xác định vị trí của M, N tương ứng.

HD: Mặt cầu (S) tâm I(2; -1; 3) và có bán kính R = 3.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P):

$$d = d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) - 3 + 16|}{3} = 5 \Rightarrow d > R.$$

Do đó (P) và (S) không có điểm chung. Do vậy, min MN = d - R = 5 - 3 = 2.

Trong trường hợp này, M ở vị trí M_0 và N ở vị trí N_0 . Dễ thấy N_0 là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) và M_0 là giao điểm của đoạn thẳng IN_0 với mặt cầu (S). Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với (P), thì N_0 là giao điểm của Δ và (P).

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{n}_P = (2; 2; -1)$ và qua I nên có phương trình là

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Tọa độ của N_0 ứng với t nghiệm đúng phương trình:

$$2(2 + 2t) + 2(-1 + 2t) - (3 - t) + 16 = 0 \Leftrightarrow 9t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{Suy ra } N_0 \left(-\frac{4}{3}; -\frac{13}{3}; \frac{14}{3} \right).$$

Ta có $\overrightarrow{IM_0} = \frac{3}{5} \overrightarrow{IN_0}$. Suy ra $M_0(0; -3; 4)$

Bài 9: Cho hai mặt phẳng (P): $x + 2y - 2z + 5 = 0$; (Q): $x + 2y - 2z - 13 = 0$. Viết phương trình của mặt cầu (S) đi qua gốc tọa độ O, qua điểm A(5;2;1) và tiếp xúc với cả hai m.phẳng (P) và (Q).

Gọi I(a;b;c) là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S). Từ giả thiết ta có:

$$OI = AI = d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \begin{cases} OI = AI \\ OI = d(I, (P)) \\ d(I, (P)) = d(I, (Q)) \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} OI = AI &\Leftrightarrow OI^2 = AI^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a-5)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2 \\ &\Leftrightarrow 10a + 4b + 2c = 30 \quad (1) \end{aligned}$$

$$OI = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|a + 2b - 2c + 5|}{3} \Leftrightarrow 9(a^2 + b^2 + c^2) = (a + 2b - 2c + 5)^2 \quad (2)$$

$$d(I, (P)) = d(I, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|a + 2b - 2c + 5|}{3} = \frac{|a + 2b - 2c - 13|}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - 2c + 5 = a + 2b - 2c - 13 \ (\text{loại}) \\ a + 2b - 2c + 5 = -a - 2b + 2c + 13 \end{cases} \Leftrightarrow a + 2b - 2c = 4 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (3) suy ra: } b = \frac{17}{3} - \frac{11a}{6}; c = \frac{11 - 4a}{3} \quad (4)$$

Từ (2) và (3) suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ (5)

Thế (4) vào (5) và thu gọn ta được: $(a-2)(221a-658)=0$

Như vậy $a=2$ hoặc $a=\frac{658}{221}$. Suy ra: $I(2;2;1)$ và $R=3$ hoặc $I\left(\frac{658}{221}; \frac{46}{221}; -\frac{67}{221}\right)$ và $R=3$.

Vậy có hai mặt cầu thỏa mãn yêu cầu với phương trình lần lượt là:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9 \text{ và } \left(x - \frac{658}{221}\right)^2 + \left(y - \frac{46}{221}\right)^2 + \left(z + \frac{67}{221}\right)^2 = 9$$

Bài 10: Cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-1=0$ và các đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}; d_2: \frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}. \text{ Tìm các điểm } M \in d_1, N \in d_2 \text{ sao cho } MN //$$

(P) và cách (P) một khoảng bằng 2.

$$\text{Phương trình tham số của } d_1 \text{ là: } \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-3t \\ z=2t \end{cases} \text{ M thuộc } d_1 \text{ nên tọa độ của M}$$

$$(1+2t; 3-3t; 2t).$$

Theo đề:

$$d(M, (P)) = \frac{|1+2t-2(3-3t)+4t-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|12t-6|}{3} = 2 \Leftrightarrow 12t-6 = \pm 6 \Leftrightarrow t_1=1, t_2=0.$$

+ Với $t_1=1$ ta được $M_1(3;0;2)$;

+ Với $t_2=0$ ta được $M_2(1;3;0)$

+ Ứng với M_1 , điểm $N_1 \in d_2$ cần tìm phải là giao của d_2 với mp qua M_1 và // mp (P), gọi mp này là (Q_1) . PT (Q_1) là:
 $(x-3)-2y+2(z-2)=0 \Leftrightarrow x-2y+2z-7=0$ (1).

$$\text{Phương trình tham số của } d_2 \text{ là: } \begin{cases} x=5+6t \\ y=4t \\ z=-5-5t \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được: $-12t-12=0 \Leftrightarrow t=-1$. Điểm N_1 cần tìm là $N_1(-1;-4;0)$.

+ Ứng với M_2 , tương tự tìm được $N_2(5;0;-5)$.

Bài 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $D(-1; 1; 1)$ và cắt ba trục tọa độ tại các điểm M, N, P khác gốc O sao cho D là trực tâm của tam giác MNP)

Theo giả thiết ta có $M(m; 0; 0) \in Ox$, $N(0; n; 0) \in Oy$, $P(0; 0; p) \in Oz$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{DP} = (1; -1; p-1); \overrightarrow{NM} = (m; -n; 0) \\ \overrightarrow{DN} = (1; n-1; -1); \overrightarrow{PM} = (m; 0; -p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{NM} = m+n \\ \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{PM} = m+p \end{cases}$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng (P): } \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1. \text{ Vì } D \in (P) \text{ nên: } \frac{-1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1.$$

$$D \text{ là trực tâm của } \Delta MNP \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DP} \perp \overline{NM} \\ \overline{DN} \perp \overline{PM} \\ D \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{DP} \cdot \overline{NM} = 0 \\ \overline{DN} \cdot \overline{PM} = 0 \\ D \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m+n=0 \\ m+p=0 \\ \frac{-1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ n=p=3 \end{cases}$$

Kết luận, phương trình của mặt phẳng (P): $\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x=2+4t \\ y=3+2t \\ z=-3+t \end{cases}$ và mặt phẳng (P)

: $-x+y+2z+5=0$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) nằm trong (P), song song với (d) và cách (d) một khoảng là $\sqrt{14}$.

Chọn $A(2;3;-3)$, $B(6;5;-2) \in (d)$, mà $A, B \in (P)$ nên $(d) \subset (P)$.

Gọi $\vec{u}$ là VTCP của $(d_1) \subset (P)$, qua A và vuông góc với (d) thì $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_d \\ \vec{u} \perp \vec{u}_p \end{cases}$

nên ta chọn $\vec{u} = [\vec{u}_d, \vec{u}_p] = (3; -9; 6)$.

$$\text{Phương trình của đường thẳng } (d_1): \begin{cases} x=2+3t \\ y=3-9t \\ z=-3+6t \end{cases} (t \in R)$$

Lấy M trên (d_1) thì $M(2+3t; 3-9t; -3+6t)$. (Δ) là đường thẳng qua M và song song với (d).

$$\text{Theo đề: } AM = \sqrt{14} \Leftrightarrow \sqrt{9t^2 + 81t^2 + 36t^2} = \sqrt{14} \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{3}$$

$$\bullet t = -\frac{1}{3} \Rightarrow M(1;6;-5) \Rightarrow (\Delta_1): \frac{x-1}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+5}{1}$$

$$\bullet t = \frac{1}{3} \Rightarrow M(3;0;-1) \Rightarrow (\Delta_2): \frac{x-3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$

Bài 12: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường

thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ .

Xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất

Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì $P = AB + AM + BM$.

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM + BM$ nhỏ nhất.

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ có PTTS: } \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}. \text{ Điểm } M \in \Delta \text{ nên } M(-1+2t; 1-t; 2t).$$

$$AM = \sqrt{(-2+2t)^2 + (-4-t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$BM = \sqrt{(-4+2t)^2 + (-2-t)^2 + (-6+2t)^2} = \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

$$AM + BM = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2}$$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ $\vec{u} = (3t; 2\sqrt{5})$ và $\vec{v} = (-3t + 6; 2\sqrt{5})$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(3t-6)^2 + (2\sqrt{5})^2} \end{cases}$$

Suy ra $AM + BM = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ và $\vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5}) \Rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = 2\sqrt{29}$

Mặt khác, với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ ta luôn có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$. Như vậy $AM + BM \geq 2\sqrt{29}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{3t}{-3t+6} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow M(1; 0; 2)$ và $\min(AM + BM) = 2\sqrt{29}$.

Vậy khi $M(1; 0; 2)$ thì $\min P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$

Bài 13: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

HD: Mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng là đường kính

Bài 14: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(4; 0; 0)$, $B(0; 0; 4)$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 4 = 0$. Tìm điểm C trên mặt phẳng (P) sao cho $\triangle ABC$ đều.

HD: C thuộc đường thẳng d với d là giao của (P) và mp trung trực của đoạn AB

Tìm điểm C thuộc d sao cho $CA = AB$.

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(10; 2; -1)$ và đường thẳng d có phương

trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, song song với d và

khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất.

Bài 15: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

a. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d.

b. Viết phương trình mặt phẳng (α) // d và đi qua A sao cho khoảng cách từ d đến (α) lớn nhất.

Bài 16: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} \text{ và mp } (\alpha): x+y+z=0$$

a. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d.

b. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, $\Delta // d$ sao cho khoảng cách từ Δ đến d lớn nhất.

Bài 17: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ mặt phẳng (P): $x+2y-3z+4=0$.

a. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt Δ và góc tạo bởi d và Δ lớn nhất.

b. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt Δ và góc tạo bởi d và Δ bé nhất.

B. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

I. Tọa độ

1. Hệ trục tọa độ Oxy gồm ba trục Ox, Oy đôi một vuông góc với nhau với hai vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$).

2. $\vec{a}(a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$; $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

3. **Tọa độ của vector:** Cho $\vec{u}(x; y), \vec{v}(x'; y')$

a. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x'; y = y'$

b. $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$

c. $k\vec{u} = (kx; ky)$

d. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

e. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

f.

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

g. $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

4. **Tọa độ của điểm:** Cho $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$

a. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

b. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

c. G là trọng tâm tam giác ABC ta có:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

d. M chia AB theo tỉ số k: $x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}$

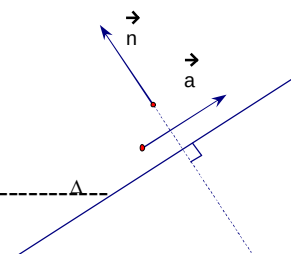
Đặc biệt: M là trung điểm của AB: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

II. Phương trình đường thẳng:

1. Một đường thẳng Δ được xác định khi biết một điểm $M(x_0; y_0)$ và một vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ hoặc một vector chỉ phương $\vec{a} = (a; b)$

Phương trình tổng quát $A(x - x_0) + (y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$.

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$



Phương trình đường thẳng qua M có hệ số góc k : $y = k(x - x_0) + y_0$.

2. Khoảng cách từ một điểm $M(x_M; y_M)$ đến một đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ là:

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

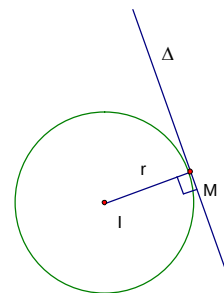
III. Phương trình đường tròn:

1. Một đường tròn được xác định khi biết tâm $I(a; b)$ và bán kính r .

Phương trình:

Dạng 1: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Dạng 2: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + d = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 - d > 0$ và $r = \sqrt{a^2 + b^2 - d}$.



2. Điều kiện để đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C) là:

$$d(I, \Delta) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r$$

IV. Ba đường conic:

ELIP:

1. Phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b > 0$).

2. Các yếu tố: $c^2 = a^2 - b^2$, $c > 0$.

Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$;
 $B_1B_2 = 2b$.

Độ dài trục lớn $A_1A_2 = 2a$

Độ dài trục bé

Hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Bốn đỉnh: đỉnh trên trục lớn $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$,

đỉnh trên trục bé $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$.

Bán kính qua tiêu điểm: $MF_1 = r_1 = a + ex_M$; $MF_2 = r_2 = a - ex_M$

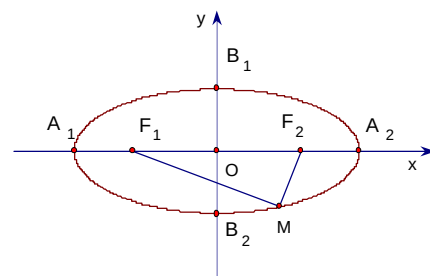
Tâm sai: $e = \frac{c}{a} < 1$

Đường chuẩn: $x = \pm \frac{a}{e}$

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $d = 2 \frac{a}{e}$.

3. Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với elip là: $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

HYPERBOL:



1. Phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0).$

2. Các yếu tố: $c^2 = a^2 + b^2, c > 0.$

Tiêu cự: $F_1F_2=2c$;
 $B_1B_2=2b.$

Độ dài trục thực $A_1A_2=2a$

Độ dài trục ảo

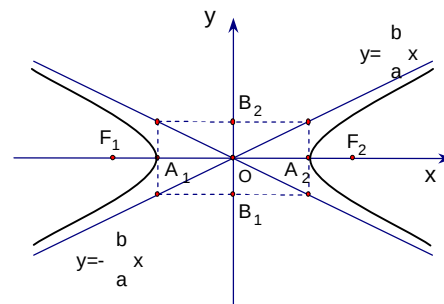
Hai tiêu điểm $F_1(-c;0), F_2(c;0).$

Hai đỉnh: đỉnh trên trục thực $A_1(-a;0), A_2(a;0),$

Hai đường tiệm cận: $y = \pm \frac{b}{a}x$

Tâm sai: $e = \frac{c}{a} > 1$

Đường chuẩn: $x = \pm \frac{a}{e}$



Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $d = 2 \frac{a}{e}$

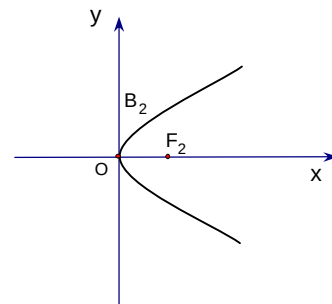
3. Điều kiện để đường thẳng $Ax+By+C=0$ tiếp xúc với hypebol là: $A^2a^2-B^2b^2=C^2.$

PARABOL:

1. Phương trình chính tắc: $y^2 = 2px, (p > 0 \text{ gọi là tham số tiêu}).$

2. Các yếu tố:

Một tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, đường chuẩn $x = -\frac{p}{2}$



B. BÀI TẬP CƠ BẢN.

- Trong mặt phẳng Oxy, tìm phương trình đường tròn có tâm $I(1;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng(D): $3x-4y+12=0.$
- Trong mặt phẳng Oxy cho Parabol (P) nhận Ox làm trục đối xứng, đi qua gốc tọa độ và đi qua điểm $M(2;-2\sqrt{2}).$
 - Lập phương trình của (P).
 - Đường thẳng (D) đi qua điểm $E(2;0)$, song song với đường thẳng: $-2x+y-1=0$ và cắt (P) tại hai điểm $F_1, F_2.$ Xác định tọa độ của $F_1, F_2.$
 - Tính diện tích của tam giác có một đỉnh nằm trên đường chuẩn của (P), còn hai đỉnh kia là hai đầu dây đi qua tiêu điểm và song song với trục Oy.
 - Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P) với đường thẳng (D).
- Trong mặt phẳng cho Elip: $9x^2+16y^2=144.$
 - Tìm các tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của Elip.
 - Lập phương trình của Parabol có đỉnh trùng với gốc tọa độ và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên phải của Elip đã cho.

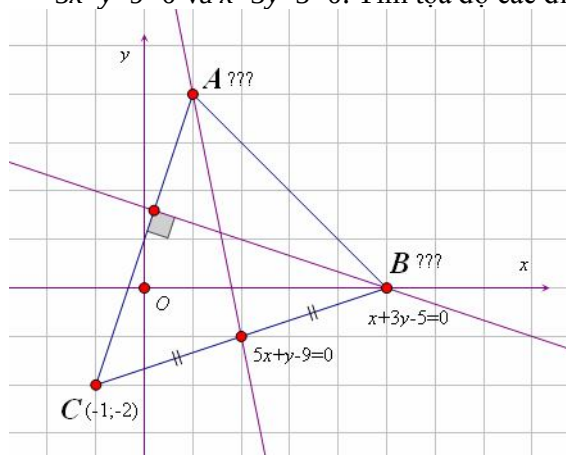
-
4. Trong mặt phẳng Oxy cho Hyperbol (H) : $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.
 - a. Tìm tâm sai và các tiệm cận của (H).
 - b. Lập phương trình tiếp tuyến của (H) đi qua điểm $M(5;-4)$.
 5. Trong mpOxy cho cho Parabol (P) có phương trình : $y^2 = 8x$.
 - a. Tìm tọa độ của tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của (P).
 - b. Chứng minh rằng với mọi $k \neq 0$ đường thẳng : $kx - y - 2k = 0$ luôn luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
 6. Trong mpOxy cho ba điểm $A(0;1), B(1;-1), C(2;0)$.
 - a. Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và viết phương trình đường tròn đó.
 - b. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ I.
 7. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $F(3;0)$ và đường thẳng (D) có phương trình $3x - 4y + 16 = 0$.
 - a. Tính khoảng cách từ điểm F tới (D). Suy ra phương trình đường tròn có tâm là F và tiếp xúc với (D).
 - b. Viết phương trình của parabol (P) có tiêu điểm là F và có đỉnh là gốc tọa độ O.
 - c. Chứng tỏ rằng (P) tiếp xúc với (D), tìm tọa độ tiếp điểm.
 8. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip : $9x^2 + 25y^2 = 225$.
 - a. Viết phương trình chính tắc và xác định các tiêu điểm, tâm sai của Elip.
 - b. Một đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$ và đi qua điểm $A(4;2)$. Viết phương trình của đường tròn và chứng tỏ rằng (C) đi qua hai tiêu điểm của Elip.
 9. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip (E): $x^2 + 3y^2 = 12$.
 - a. Tính độ dài trục lớn, trục nhỏ, tọa độ hai tiêu điểm và tâm sai của Elip (E).
 - b. Cho đường thẳng (D) có phương trình: $mx - 3y + 9 = 0$. Tính m để (D) tiếp xúc với (E).
 - c. Viết phương trình của Parabol có đỉnh trùng với gốc tọa độ và có tiêu điểm là tiêu điểm bên trái của Elip đã cho.
 10. Trong mpOxy cho đường thẳng (D) có phương trình : $4x - 3y + 2 = 0$ và $F(2;0)$
 - a. Viết phương trình Parabol (P) nhận F làm tiêu điểm và đỉnh là gốc tọa độ.
 - b. Tìm khoảng cách từ F đến đường thẳng (D). Tìm tọa độ tiếp điểm.
 11. Trong mpOxy cho Elip (E) có phương trình : $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.
 - a. Tìm tọa độ tiêu điểm và tâm sai của (E).
 - b. Viết phương trình đường thẳng (D_1) qua F_1 và có hệ số góc $k = 1$ và (D_2) qua F_2 và có hệ số góc $k = -1$. Chứng tỏ $(D_1) \perp (D_2)$.
 - c. Viết phương trình đường tròn tâm F_2 qua giao điểm của hai đường thẳng (D_1) và (D_2) . Từ đó suy ra (D_1) tiếp xúc với đường tròn.
 12. Trong mpOxy cho $F(0;3)$ và đường thẳng (D) : $3x - 4y + 16 = 0$.
 - a. Lập phương trình đường tròn tâm F và tiếp xúc với (D).
 - b. Lập phương trình của Parabol (P) có tiêu điểm F và có đỉnh là gốc tọa độ. Chứng tỏ rằng (P) tiếp xúc với (D). Tìm tọa độ tiếp điểm.
 13. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường Hypebol với phương trình : $3x^2 - y^2 = 12$.
 - a. Tìm tọa độ các đỉnh, tiêu điểm, tâm sai và phương trình các đường tiệm cận của hypebol đó.
 - b. Tìm các giá trị của tham số k để đường thẳng $y = kx$ cắt hypebol nói trên.

-
14. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(-1;2)$, $B(2;1)$ và $C(2;5)$.
- Viết phương trình tham số của các đường thẳng AB và AC . Tính độ dài các đoạn thẳng AB và AC .
 - Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
15. Trên mặt phẳng Oxy cho Elíp có phương trình : $x^2 + 4y^2 = 4$.
- Tìm tọa độ các đỉnh, tiêu điểm và tâm sai của elíp.
 - Đường thẳng qua 1 tiêu điểm của elíp và song song với trục Oy cắt elíp tại 2 điểm M và N . Tính độ dài đoạn thẳng MN .
 - Tìm giá trị của k để đường thẳng $y = x + k$ cắt elíp đã cho.
16. Trong mặt phẳng Oxy cho hypebol : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.
- Xác định tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm, tâm sai và các tiệm cận của hypebol. Vẽ hypebol đã cho.
 - Tìm các giá trị của n để đường thẳng $y = nx - 1$ có điểm chung với hypebol.
17. Trong mặt phẳng Oxy cho elíp (E) có phương trình $3x^2 + 5y^2 = 30$.
- Xác định tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm và tâm sai của elíp.
 - Một đường thẳng Δ đi qua tiêu điểm $F_2(2;0)$ của elíp (E) , song song với trục tung, cắt elíp (E) tại 2 điểm A và B . Tính khoảng cách từ A và B tới tiêu điểm F_1 .
18. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(2;3)$ và $B(-2;1)$.
- Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm nằm trên trục hoành.
 - Viết phương trình chính tắc của Parabol có đỉnh là gốc tọa độ, đi qua điểm A và nhận trục hoành làm trục đối xứng. Vẽ đường tròn và Parabol tìm được trên cùng một hệ trục tọa độ.
19. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(5;0)$ và $B(4;3\sqrt{2})$.
- Lập phương trình đường tròn nhận AB làm đường kính. Tìm tọa độ các giao điểm của đường tròn và trục hoành.
 - Lập phương trình chính tắc của đường Elíp đi qua A và B .
20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hypebol có phương trình :
- $$4x^2 - 9y^2 = 36.$$
- Xác định tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm và tâm sai của hypebol.
 - Viết phương trình chính tắc của elíp đi qua điểm $M\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}; 3\right)$ và có chung các tiêu điểm với hypebol đã cho.
21. Trên mặt phẳng Oxy cho cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.
- Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C) .
 - Chứng minh rằng : Đường tròn (C) đi qua gốc tọa độ O . Gọi OA là đường kính của đường tròn, viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm A .
22. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho Elíp (E) : $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$.
- Xác định tọa độ các tiêu điểm và độ dài các trục của (E) .
 - Điểm M thuộc (E) nhìn hai tiêu điểm của nó dưới một góc vuông. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M .
23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình :
- $$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0.$$
- Xác định tâm và bán kính của đường tròn (C) .

-
- b. Tìm các điểm thuộc đường tròn (C) có hoành độ $x = 1$ và viết phương trình tiếp tuyến tại các điểm đó.
24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hypebol (H) đi qua điểm $M\left(5; \frac{9}{4}\right)$ và nhận điểm $F(5;0)$ làm tiêu điểm của nó.
- Viết phương trình chính tắc của hypebol (H).
 - Viết phương trình tiếp tuyến của (H) biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $5x + 4y - 1 = 0$.
25. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho một elip (E) có khoảng cách giữa các đường chuẩn là 36 và các bán kính qua tiêu điểm của M nằm trên elip (E) là 9 và 15.
- Viết phương trình chính tắc của elip (E).
 - viết phương trình tiếp tuyến của elip (E) tại điểm M.
26. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho Elíp (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có hai tiêu điểm là F_1, F_2 .
- Cho điểm $M(3;m)$ thuộc (E), hãy viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại M khi $m > 0$.
 - Cho A và B là hai điểm thuộc (E) sao cho $AF_1 + BF_2 = 8$. Hãy tính $AF_2 + BF_1$.

C. BÀI TẬP NÂNG CAO

1. (CD Khối B_2009) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $C(-1; -2)$, đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là $5x + y - 9 = 0$ và $x + 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A và B.



ĐS: $A(1;4), B(5;0)$.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$ với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C) Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.
3. (ĐH_CD Khối D_2002)
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy , cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ điểm M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Cách 1:
 Cho sự biến thiên của $N(n)$ với $n > 0, n \in \mathbb{N}$ là hai điểm chuyển động trên hai trục Ox và Oy .
 Đường thẳng MN có phương trình: $\frac{x}{n} + \frac{y}{n} - 1 = 0$
 Đường thẳng này tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi:
 $16\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$
 Theo BĐT Côsi ta có:
 $MN^2 = m^2 + n^2 = \left[m^2 + n^2 + \frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2}\right] \geq 25 + 16 \frac{n^2}{m^2} + 9 \frac{m^2}{n^2}$
 $\geq 25 + 2\sqrt{16 \cdot 9} = 49 \Rightarrow MN \geq 7$
 Đẳng thức xảy ra khi:
 $\frac{16}{m^2} = \frac{9}{n^2} \Rightarrow \frac{4}{m} = \frac{3}{n} \Rightarrow m = \frac{4}{3}n$
 KL: Với $M(2\sqrt{7};0), N(0;\sqrt{21})$ thì MN đạt GTNN và GTNN (MN) = 7.

ĐS: $M(2\sqrt{7};0), N(0;\sqrt{21}), MN_{\min} = 7$

4. (ĐH_CD Khối D_2008) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y^2 = 16x$ và điểm $A(1; 4)$. Hai điểm phân biệt B, C (B và C khác A) di động trên (P) sao cho góc $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS: Tọa độ điểm cố định $I(17;-4)$

5. (ĐH_CD Khối D_2003) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d . Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C') .

ĐS: $A(1;0), B(3;2)$

6. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 1)$, đường cao qua đỉnh B có phương trình là $x-3y-7=0$ và đường trung tuyến qua đỉnh C có phương trình: $x+y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C của tam giác ABC .
7. Cho F_1, F_2 là tiêu điểm trái, tiêu điểm phải của hypebol (H) . Điểm M thuộc (H) có hoành độ $x_M = -5$ và $MF_1 = \frac{9}{4}; MF_2 = \frac{41}{4}$. Lập phương trình chính tắc của hypebol.
8. (ĐH_CD Khối D_2005) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

ĐS: $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

9. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các đường thẳng: $d_1: x+y+3=0, d_2: x-y-4=0, d_3: x-2y=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 .

ĐS: $M(-22;-11), (2;1)$.

10. (ĐH_CD Khối D_2006) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M , có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) , tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) .

ĐS: $M_1(1;4), M_2(-2;1)$

11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , tìm điểm A thuộc trục hoành và điểm B thuộc trục tung sao cho A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x - 2y + 3 = 0$.

ĐS: $A(2;0), B(0;4)$.

12. (ĐH_CD Khối D_2007) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + m = 0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

ĐS: $m=19, m=-41$

13. (ĐH CD Khối D_2009) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x-2y-3=0$ và $6x-y-4=0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

ĐS: AC: $3x-4y+5=0$

14. (Khối A_2009) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

ĐS: AB: $y-5=0; x-4y+19=0$

15. (Khối A_2008) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

ĐS: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

16. (Khối A_2007) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2)$, $B(-2;-2)$ và $C(4;-2)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

ĐS: $x^2+y^2-x+y-2=0$

17. (Khối A_2006) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng $d_1: x+y+3=0$, $d_2: x-y-4=0$, $d_3: x-2y=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 .

ĐS: $M_1(-22;-11), M_2(2;1)$

18. (Khối A_2005) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x-y=0$ và $d_2: 2x+y-1=0$. tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

ĐS: $A(1;1), B(0;0), C(1;-1), D(2;0)$ hoặc $A(1;1), B(2;0), C(1;-1), D(0;0)$

19. (Khối A_2004) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;2)$ và $B(-\sqrt{3};-1)$. Tìm tọa độ trục tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

ĐS: $H(\sqrt{3};-1), I(-\sqrt{3};1)$

20. (Khối A_2002) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

ĐS: $G\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$ hoặc $G\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

21. (Khối B_2009) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $(x-2)^2+y^2=4/5$ và hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$, $\Delta_2: x-7y=0$. Xác định tọa độ tâm K và bán kính đường tròn (C₁); biết đường tròn (C₁) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1 , Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).

$$\text{ĐS: } K\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right), R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

22. (Khối B_2008) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm H(-1;-1), đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

$$\text{ĐS: } C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$$

23. (Khối B_2007) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm A(2;2) và các đường thẳng: $d_1: x+y-2=0$, $d_2: x+y-8=0$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

$$\text{ĐS: } B(-1;3), C(3;5) \text{ hoặc } B(3;-1), C(5;3)$$

24. (Khối B_2006) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm M(-3;1). Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 .

$$\text{ĐS: } T_1T_2: 2x+y-3=0$$

25. (Khối B_2005) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(2;0) và B(6;4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

$$\text{ĐS: } (C_1): (x-2)^2+(y-1)^2=1 \text{ hoặc } (x-2)^2+(y-7)^2=49$$

26. (Khối B_2004) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(1;1) và B(4;-3). Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x-2y-1=0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

$$\text{ĐS: } C_1(7;3), C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$$

27. (Khối B_2003) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $AB=AC$, $\hat{BAC} = 90^\circ$. Biết M(1;-1) là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

$$\text{ĐS: } A(0;2), B(4;0), C(-2;-2)$$

28. (Khối B_2002) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

$$\text{ĐS: } A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$$

