

**THAM LUẬN :****MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ và BÀI TOÁN GTLN & GTNN
CỦA BIỂU THỨC ĐẠI SỐ TRONG CÁC ĐỀ THI CĐ - ĐH**

Bất đẳng thức là một mảng kiến thức khó của toán học phổ thông, nó thường xuyên xuất hiện trong các đề thi HSG cũng như thi tuyển sinh CĐ - ĐH. Để chứng minh bất đẳng thức ta có nhiều phương pháp; trong đợt sinh hoạt chuyên môn của giáo viên Toán cụm 6 vào tháng 03 năm 2011, tôi đã có tham luận giới thiệu phương pháp sử dụng các bất đẳng thức cổ điển (Cosi hoặc Bunhiacopski), phương pháp dùng đạo hàm . Hôm nay, trong đợt sinh hoạt này tôi tiếp tục trình bày thêm 4 phương pháp đặc sắc nữa để chứng minh bất đẳng thức cũng như tìm GTLN và GTNN của một biểu thức đại số : phương pháp dùng miền giá trị, phương pháp Hình học, phương pháp Hàm số và phương pháp khảo sát lần lượt từng biến. Chúng ta sẽ làm quen với các phương pháp này qua một số ví dụ sau đây :

I. Phương pháp dùng miền giá trị:

Ví dụ 1 : Cho x, y là các số thực thỏa mãn : $3x^2 + 2xy + y^2 = 11$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức : $P = x^2 + 2xy + 3y^2$.

- Gọi T là tập giá trị của P

$$\text{Ta có : } m \in T \Leftrightarrow \text{Hệ sau có nghiệm } \begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = m \end{cases} \quad (I)$$

- Nếu $x = 0$ thì hệ trở thành $\begin{cases} y^2 = 11 \\ 3y^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{11} \\ m = 33 \end{cases} : m = 33 \text{ nhận}$

- Xét trường hợp $x \neq 0$. Đặt $y = tx$, ta có hệ:

$$\begin{cases} x^2(3 + 2t + t^2) = 11 \\ x^2(1 + 2t + 3t^2) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{11}{3 + 2t + t^2} \\ \frac{1 + 2t + 3t^2}{3 + 2t + t^2} = \frac{m}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{11}{3 + 2t + t^2}} \\ (m - 33)t^2 + 2(m - 11)t + 3m - 11 = 0 \end{cases} \quad (II)$$

Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (II) có nghiệm $x \neq 0 \Leftrightarrow \text{pt : } (m - 33)t^2 + 2(m - 11)t + 3m - 11 = 0$, (1), có nghiệm

- Nếu $m = 33$ thì phương trình (1) có nghiệm $t = -\frac{1}{2}$

- Nếu $m \neq 33$, khi đó phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta_t \geq 0 \Leftrightarrow (m - 11)^2 - (m - 33)(3m - 11) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2m^2 + 88m - 242 \geq 0 \Leftrightarrow m \in [22 - 11\sqrt{3}; 22 + 11\sqrt{3}] \setminus \{33\}$$

- Kết hợp các trường hợp trên, ta được các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm là $m \in [22 - 11\sqrt{3}; 22 + 11\sqrt{3}]$

Do đó : $T = [22 - 11\sqrt{3}; 22 + 11\sqrt{3}]$. Vậy : $\text{Min}P = 22 - 11\sqrt{3}$, $\text{Max}P = 22 + 11\sqrt{3}$

Ví dụ 2 : Cho hai số thực x, y thỏa mãn : $x^2 + y^2 = 2(x + y) + 7$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \sqrt[3]{x(x - 2)} + \sqrt[3]{y(y - 2)}$



- Gọi T là tập giá trị của P . Ta có : $m \in T \Leftrightarrow$ Hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(x + y) + 7 \\ \sqrt[3]{x(x-2)} + \sqrt[3]{y(y-2)} = m \end{cases} \quad (I)$$

- Đặt : $u = \sqrt[3]{x(x-2)}$, $v = \sqrt[3]{y(y-2)}$

Ta có : $u = \sqrt[3]{x(x-2)} = \sqrt[3]{(x-1)^2 - 1} \geq -1$, tương tự : $v \geq -1$

$$\text{Hệ (I) thành } \begin{cases} u^3 + v^3 = 7 \\ u + v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 7 \\ u + v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m \\ uv = \frac{m^3 - 7}{3m} \end{cases} \quad (II)$$

Suy ra : u, v là hai nghiệm của phương trình $t^2 - mt + \frac{m^3 - 7}{3m} = 0 \quad (1)$

- Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Hệ (II) có nghiệm (u, v) thỏa $u \geq -1, v \geq -1$
 $\Leftrightarrow$ Pt (1) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa $-1 \leq t_1 \leq t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ (t_1 + 1) + (t_2 + 1) \geq 0 \\ (t_1 + 1)(t_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - \frac{4(m^3 - 7)}{3m} \geq 0 \\ m + 2 \geq 0 \\ \frac{m^3 - 7}{3m} + 1 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq \sqrt[3]{28} \\ m \geq -2 \\ m < 0 \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \sqrt[3]{28}$$

- Do đó : $T = [1; \sqrt[3]{28}]$. Vậy : $\text{Min}P = 1, \text{Max}P = \sqrt[3]{28}$

Ví dụ 3: Cho hai số thực thay đổi $x \neq 0, y \neq 0$ thỏa mãn : $xy(x + y) = x^2 - xy + y^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \quad (\text{Đề TSDH -})$

Khối A - Năm 2006)

- Gọi T là tập giá trị của P . Ta có : $m \in T \Leftrightarrow$ Hệ sau có nghiệm $x \neq 0, y \neq 0$:

$$\begin{cases} xy(x + y) = x^2 - xy + y^2 \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + y) = (x + y)^2 - 3xy \\ \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3 y^3} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + y) = (x + y)^2 - 3xy \\ \frac{xy(x + y)^2}{x^3 y^3} = m \\ (do : x^2 - xy + y^2 = xy(x + y)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy(x + y) = (x + y)^2 - 3xy \\ \frac{(x + y)^2}{x^2 y^2} = m \end{cases} \quad (I)$$

- Đặt : $S = x + y, P = xy$; điều kiện : $S^2 \geq 4P$. Hệ (I) thành $\begin{cases} SP = S^2 - 3P \\ \frac{S^2}{P^2} = m \end{cases} \quad (II)$

Vì $S^2 - 3P = x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$; $\forall x, y \neq 0$. Nên ta có : $SP > 0 \Rightarrow \frac{S}{P} > 0$



Khi đó, hệ phương trình (I) có nghiệm $x \neq 0, y \neq 0 \Leftrightarrow$ Hệ (II) có nghiệm (S; P) thỏa $S^2 \geq 4P$

• Nếu $m \leq 0$ thì hệ phương trình (II) vô nghiệm

• Nếu $m > 0$ thì từ phương trình $\frac{S^2}{P^2} = m \Rightarrow \frac{S}{P} = \sqrt{m} \Rightarrow S = \sqrt{m} P$

Thay vào phương trình $SP = S^2 - 3P$ ta được $\sqrt{m}P^2 = mP^2 - 3P \Leftrightarrow (m - \sqrt{m})P = 3$ (1), vì $P \neq 0$

Pt (1) này có nghiệm $P \Leftrightarrow m - \sqrt{m} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$. Khi đó: $P = \frac{3}{\sqrt{m}(\sqrt{m} - 1)} \Rightarrow S = \frac{3}{\sqrt{m} - 1}$

▪ Quay lại, Hệ (II) có nghiệm (S; P) thỏa $S^2 \geq 4P$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{9}{(\sqrt{m} - 1)^2} \geq \frac{12}{\sqrt{m}(\sqrt{m} - 1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{4 - \sqrt{m}}{\sqrt{m}(\sqrt{m} - 1)^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \sqrt{m} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (0; 16] \setminus \{1\}$$

▪ Tóm lại, các giá trị của m để hệ (I) có nghiệm $x \neq 0, y \neq 0$ là $m \in (0; 16] \setminus \{1\}$

Vậy: $\text{Max}P = 16$ (chú ý không tồn tại $\text{Min}P$)

Bài tập tương tự:

1. Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa mãn $\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 1) + \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{y} - 1) = \sqrt[3]{xy}$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{xy}$.

2. Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}.$$

3. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn: $x + y + xy = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} - x^2 - y^2$$

II. Phương pháp Hình học:

Ví dụ 4: Cho $x, y, z > 0$ và thỏa: $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

(Đề TSDH -

Khối A - Năm 2003)

▪ Đặt $\vec{a} = \left(\frac{1}{x} - x; \sqrt{2}\right)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{y} - y; \sqrt{2}\right)$, $\vec{c} = \left(\frac{1}{z} - z; \sqrt{2}\right)$

Ta có

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x + y + z)\right)^2 + (3\sqrt{2})^2}$$



▪ Mặt khác :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x + y + z) = \left(\frac{1}{x} + 9x\right) + \left(\frac{1}{y} + 9y\right) + \left(\frac{1}{z} + 9z\right) - 10(x + y + z) \geq 6 + 6 + 6 - 10 = 8$$

(áp dụng bất đẳng thức Cossi cho 2 số dương và vì

$$x + y + z \leq 1)$$

Suy ra : $\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - (x + y + z)\right]^2 \geq 64$

▪ Vậy : $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{64 + 18} = \sqrt{82}$ (đpcm)

Ví dụ 5: Cho x, y, z là các số dương thay đổi thỏa $x + y + z \leq \frac{3}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{z^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{x^2}}$$

▪ Đặt $\vec{u} = \left(x; \frac{1}{y}\right)$, $\vec{v} = \left(y; \frac{1}{z}\right)$, $\vec{w} = \left(z; \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \left(x + y + z; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

▪ Ta có

$$: \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{z^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{x^2}} = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{(x + y + z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sqrt{\left(3\sqrt[3]{xyz}\right)^2 + \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right)^2} = 3\sqrt[3]{(xyz)^2 + \frac{1}{(xyz)^2}} \\ &= 3\sqrt[3]{(xyz)^2 + \frac{1}{16\sqrt[3]{(xyz)^2}} + \frac{15}{16\sqrt[3]{(xyz)^2}}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{(xyz)^2} \cdot \frac{1}{16\sqrt[3]{(xyz)^2}} + \frac{15}{16\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$= 3\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{15}{16} \cdot \frac{9}{(x+y+z)^2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{15}{16} \cdot \frac{9}{(3/2)^2}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

▪ Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$ và $x + y + z \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

▪ Vậy : $\text{Min} P = \frac{3\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

Ví dụ 6: Cho x, y, z là các số thực thay đổi thỏa $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z^2 + 2z(x + y) = 8 \end{cases}$ Tìm GTLN của biểu thức

: $P = z(y - x)$



▪ Ta có :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z^2 + 2z(x+y) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 4 \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y)^2 + (-2x)^2 = 8 \\ \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 = 6 \end{cases}$$

▪ Đặt $\vec{u} = \left(x + \frac{z}{2}; y + \frac{z}{2}\right)$, $\vec{v} = (2y; -2x) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{6}$, $|\vec{v}| = \sqrt{8}$

Ta có : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2y\left(x + \frac{z}{2}\right) - 2x\left(y + \frac{z}{2}\right) = z(y - x) = P$

Mà $P = \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| |\vec{v}| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{3}$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng

Suy ra : $\frac{x + \frac{z}{2}}{2y} = \frac{y + \frac{z}{2}}{-2x} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = -z(x + y) \Leftrightarrow z(x + y) = -4$, vì $x^2 + y^2 = 2$

Suy ra : $z^2 = 16 \Leftrightarrow z = \pm 4$ (vì $z^2 + 2z(x + y) = 8$), khi đó được $\begin{cases} x + y = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$; giải được (x,

y, z) là :

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, -4\right), \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, -4\right), \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 4\right), \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 4\right)$$

(*)

▪ Vậy : $\text{Max}P = 4\sqrt{3}$ với (x; y; z) thỏa (*)

Ví dụ 7: Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2| \quad (\text{Đề TSDH - Khối B - Năm 2006})$$

▪ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy; xét $M(x-1; -y)$, $N(x+1; y)$

Do $OM + ON \geq MN$ nên $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 4y^2} = 2\sqrt{1 + y^2}$

Khi đó : $P \geq 2\sqrt{1 + y^2} + |y-2| = f(y)$

▪ Xét hàm số $f(y) = 2\sqrt{1 + y^2} + |y-2|$

• Với $y \leq 2$: $f(y) = 2\sqrt{1 + y^2} + 2 - y \Rightarrow f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1 + y^2}} - 1$

$$f(y) = 0 \Rightarrow 2y = \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4y^2 = 1 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Lập BBT, ta có $\forall y \leq 2$ suy ra $f(y) \geq 2 + \sqrt{3}$

• Với $y \geq 2$: $f(y) \geq 2\sqrt{1 + y^2} \geq 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$

▪ Tóm lại, ta có $P \geq 2 + \sqrt{3}$; $\forall x, y$. Vậy $\text{Min}P = 2 + \sqrt{3}$ khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Ví dụ 8: Cho x, y là các số thực thỏa mãn : $x^2 + y^2 = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:



$$P = \sqrt{5-2x} + \sqrt{54-2x-14y}$$

$$\begin{aligned} \text{▪ Xét } 2P &= \sqrt{20-8x} + 2\sqrt{54-2x-14y} = \sqrt{x^2+y^2-8x+16} + 2\sqrt{x^2+y^2-2x-14y+50} \\ &= \sqrt{(x-4)^2+y^2} + 2\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2} \end{aligned}$$

▪ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy; xét A(4 ; 0) , B(1; 7) và M(x; y)

Vì x, y thỏa : $x^2 + y^2 = 4$ suy ra M(x; y) $\in$ (C) với (C) là đường tròn tâm O(0; 0) bán kính R = 2

$$\text{Khi đó : } 2P = MA + 2MB$$

▪ Gọi I(1; 0) thì I nằm trong đường tròn (C) . Khi đó mọi điểm M $\in$ (C) ta đều có : MA = 2MI

$$\text{Thật vậy, } MA = 2MI \Leftrightarrow MA^2 = 4MI^2 \Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA})^2 = 4(\vec{MO} + \vec{OI})^2$$

$$\Leftrightarrow MO^2 + OA^2 + 2\vec{MO}\vec{OA} = 4(MO^2 + OI^2 + 2\vec{MO}\vec{OI})$$

$$\Leftrightarrow 4 + 16 + 2\vec{MO}\vec{OA} = 4(4 + 1 + 2\vec{MO}\vec{OI})$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{MO}(\vec{OA} - 4\vec{OI}) = 0 : \text{đúng với mọi M thuộc (C) .}$$

▪ Ta có : $2P = MA + 2MB = 2MI + 2MB = 2(MI + MB) \geq 2IB = 14$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn IB.

$$\text{Đoạn thẳng IB có phương trình : } \begin{cases} x = 1 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{cases}, \text{ suy ra } M(1; \sqrt{3})$$

▪ Vậy: MinP = 7 khi và chỉ khi x = 1, y = $\sqrt{3}$.

Ví dụ 9: Cho a, b, c, d là 4 số thực thỏa mãn điều kiện : $\begin{cases} a^2 + b^2 + 1 = 2(a + b) \\ c^2 + d^2 + 36 = 12(c + d) \end{cases}$.

Chứng minh: $(\sqrt{2} - 1)^6 \leq (a - c)^2 + (b - d)^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^6$

$$\text{▪ Từ giả thiết, ta có } \begin{cases} (a-1)^2 + (b-1)^2 = 1 \\ (c-6)^2 + (d-6)^2 = 36 \end{cases}$$

▪ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy; xét các điểm M(a; b), N(c; d) (trong đó a, b, c, d thỏa mãn đề bài) thì M nằm trên đường tròn (C₁) có tâm O₁(1; 1), bán kính bằng 1; N nằm trên đường tròn (C₂) có tâm O₂(6; 6) , bán kính bằng 6 . Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương :

$$(\sqrt{2} - 1)^3 \leq \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leq (\sqrt{2} + 1)^3 \Leftrightarrow 5\sqrt{2} - 7 \leq MN \leq 5\sqrt{2} + 7$$

▪ Nối O với O₁, O₂ (O, O₁, O₂ thẳng hàng) cắt đường tròn (C₁) tại M₁ và M₂ , cắt đường tròn (C₂) tại N₁, N₂ (theo thứ tự O, M₁, O₁, M₂, N₁, O₂, N₂). Ta nhận thấy M₁N₂ , M₂N₁ tương ứng là các khoảng cách xa nhất và gần nhất giữa hai điểm trên hai đường tròn. Như vậy, với mọi cặp điểm M $\in$ (C₁) và N $\in$ (C₂) , ta luôn có :

$$M_2N_1 \leq MN \leq M_1N_2$$

$$\text{Trong đó : } OO_1 = \sqrt{2}OO_2 = 6\sqrt{2} \Rightarrow M_1N_2 = ON_2 - OM_1 = (6\sqrt{2} + 6) - (\sqrt{2} - 1) = 5\sqrt{2} + 7$$

$$\text{Tương tự : } M_2N_1 = ON_1 - OM_2 = (6\sqrt{2} - 6) - (\sqrt{2} + 1) = 5\sqrt{2} - 7$$

$$\text{Suy ra đpcm } 5\sqrt{2} - 7 \leq MN \leq 5\sqrt{2} + 7$$

▪ Dấu (=) bên trái trong bất đã cho xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_2$, N $\equiv N_1 \Leftrightarrow a = b = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ và

$$c = d = 6 - 3\sqrt{2}$$



Dấu (=) bên phải trong bất đẳng thức đã cho xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_1, N \equiv N_2 \Leftrightarrow a = b = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ và $c = d = 6 + 3\sqrt{2}$

Bài tập tương tự :

1. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng :
 $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq \sqrt{3}(x + y + z)$

2. Cho a, b, c, d, x, y là các số thực thỏa điều kiện :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 24 = 6a + 8b \\ c^2 + d^2 + 99 = 12c + 16d \\ 3x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$
 Tìm GTNN

của biểu thức :

$$P = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}$$

III. Phương pháp hàm số:

Ví dụ 10: Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $x^2 y^2 z^2 \leq \frac{1}{54}$

▪ Ta có : $y + z = -x, yz = \frac{(y+z)^2 - (y^2 + z^2)}{2} = \frac{x^2 - (1 - x^2)}{2} = x^2 - \frac{1}{2}$

Ngoài ra : $(y + z)^2 \geq 4yz \Rightarrow x^2 \geq 4x^2 - 2 \Rightarrow x^2 \leq \frac{2}{3}$

Do đó : $x^2 y^2 z^2 = x^2 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 = x^6 - x^4 + \frac{1}{4} x^2$

▪ Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + \frac{1}{4}t, 0 \leq t \leq \frac{2}{3}$

$$f'(t) = 3t^2 - 2t + \frac{1}{4} = 0, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \vee t = \frac{1}{6}$$

Lập

BBT

ta

thấy

$\forall t \in \left[0, \frac{2}{3}\right] : f(t) \leq \frac{1}{54}$. Suy ra $f(x^2) \leq \frac{1}{54} \Rightarrow x^6 - x^4 + \frac{1}{4}x^2 \leq \frac{1}{54} \Rightarrow x^2 y^2 z^2 \leq \frac{1}{54}$ (đpcm)

Ví dụ 11: Cho x, y thay đổi và thỏa : $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = 3(x^4 + y^4 + x^2 y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 \quad (\text{Đề TSDH -}$$

Khối B - 2009)

▪ Nhận xét : giả thiết cho $(x + y)^3 \geq 2 - 4xy$, mà $(x + y)^2 \geq 4xy$ suy ra : $(x + y)^3 + (x + y)^2 \geq 2 \Rightarrow x + y \geq 1$

▪

Ta

có

$$\begin{aligned} P &= 3(x^4 + y^4 + x^2 y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{3}{2}(x^4 + y^4) + \frac{3}{2}(x^4 + y^4 + 2x^2 y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &= \frac{3}{2}(x^4 + y^4) + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &\geq \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = \\ &= \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \end{aligned}$$



- Đặt $t = x^2 + y^2$, đk: $t = x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{1}{2}$, vì $x + y \geq 1$

Ta có $P = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 = f(t)$, $t \geq \frac{1}{2}$; $f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{9}$

Lập BBT, ta có $\forall t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) \geq \frac{9}{16}$, $f(t) = \frac{9}{16} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

- Do đó: $P \geq \frac{9}{16}$, dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy: $\text{Min}P = \frac{9}{16} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Ví dụ 12: Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa điều kiện $x + y + z = 3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2y + y^2z + z^2x}$$

- Nhận xét $3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)$, vì $x + y + z = 3$
 $3(x^2 + y^2 + z^2) = (x^3 + xy^2) + (y^3 + yz^2) + (z^3 + zx^2) + x^2y + y^2z + z^2x$

Mà $x^3 + xy^2 \geq 2\sqrt{x^3 \cdot xy^2} = 2x^2y$, $y^3 + yz^2 \geq 2y^2z$, $z^3 + zx^2 \geq 2z^2x$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2y + y^2z + z^2x$

Khi đó: $P \geq x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$

- Đặt $t = x^2 + y^2 + z^2$, ta có $9 = (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow t = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$

Ngoài ra: $xy + yz + zx = \frac{9-t}{2}$

Suy ra $P \geq t + \frac{9-t}{2t} = f(t)$

- Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{9-t}{2t}$, $t \geq 3$; $f'(t) = \frac{2t^2 - 9}{2t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$

Lập BBT suy ra: $\text{Min}_{t \geq 3} f(t) = 4$ khi $t = 3$

- Vậy: $P_{\min} = 4$ khi $x = y = z = 1$

Ví dụ 13: Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi thỏa điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = (x + y + z)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} - \frac{1}{xy + yz + zx} \right)$$

- Nhận xét

$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1 + 2(xy + yz + zx)$

$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x + y + z)[x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)] = 3xyz + (x + y + z)[1 - (xy + yz + zx)]$



$$\Rightarrow \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} = 3 + \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) [1 - (xy + yz + zx)] \geq 3 + \frac{9}{xy + yz + zx} [1 - (xy + yz + zx)]$$

$$\text{Khi đó : } P \geq 1 + 2(xy + yz + zx) + \frac{1}{2} \left[3 + \frac{9}{xy + yz + zx} [1 - (xy + yz + zx)] - \frac{1}{xy + yz + zx} \right]$$

▪ Đặt $t = xy + yz + zx$, ta có

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}, yz \leq \frac{y^2 + z^2}{2}, zx \leq \frac{z^2 + x^2}{2} \Rightarrow t = xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\text{Suy ra : } 0 < t \leq 1$$

$$\text{Ta có } P \geq 1 + 2t + \frac{1}{2} \left[3 + \frac{9(1-t)}{t} - \frac{1}{t} \right] = -2 + 2t + \frac{4}{t} = f(t)$$

▪ Xét hàm số : $f(t) = -2 + 2t + \frac{4}{t}$, $t \in (0; 1]$; $f'(t) = 2 - \frac{4}{t^2} = \frac{2t^2 - 4}{t^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \sqrt{2}$

Lập BBT suy ra : $\min_{0 < t \leq 1} f(t) = 4$ khi $t = 1$

▪ Vậy : $P_{\min} = 4$ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ví dụ 14: Cho x, y là hai số thực dương thỏa : $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = 4 \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} \right) - 9 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right)$ (Đề

TSDH – Khối B – 2011)

▪ Nhận xét : giả thiết cho $2(x^2 + y^2) + xy = (x + y)(xy + 2)$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 1 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (xy + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 1 = x + \frac{2}{x} + y + \frac{2}{y}$$

(1)

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $x + \frac{2}{x} + y + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right)$

(2)

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 0$, từ (1) và (2) suy ra : $2t + 1 \geq 2\sqrt{2} \sqrt{t + 2} \Rightarrow 4t^2 - 4t - 15 \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{5}{2}$

▪ Ta có $P = 4 \left(\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} \right) - 9 \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 4t^2 - 12t + 8 = f(t)$,

$$\forall t \geq \frac{5}{2}$$

$$f'(t) = 12t^2 - 8t - 12 = 0, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1}{2} \vee t = 2$$

Lập BBT, ta có $\forall t \geq \frac{5}{2} \Rightarrow P = f(t) \geq f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-23}{4}$



- Vậy : $\text{Min}P = -\frac{23}{4}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Bài tập tương tự :

1. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = 6(y + z - x) + 27xyz$$

2. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = xy + yz + zx + \frac{5}{x + y + z}$$

3. Cho x, y, z là các số thực thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x + 2y + 3z}{\sqrt{x^4 + 1} + \sqrt{y^4 + 16} + \sqrt{z^4 + 81}}$$

IV. Phương pháp khảo sát lần lượt từng biến :

Ví dụ 15: Cho $x, y, z \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :
 $P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x)$

- Xét $f(x) = 2x^3 - yx^2 - z^2x + 2(y^3 + z^3) - y^2z$

$$f'(x) = 6x^2 - 2yx - z^2, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{6}(y - \sqrt{y^2 + 6z^2}) \leq 0, x_1 \notin (0; 1) \\ x_2 = \frac{1}{6}(y + \sqrt{y^2 + 6z^2}) \end{cases}$$

Qua x_2 thì $f'(x)$ đổi dấu từ (-) sang (+) nên x_2 là điểm cực tiểu

• Nếu $x_2 \in [0; 1]$ thì $f(x_2) < f(0)$ và $f(x_2) < f(1)$

• Nếu $x_2 \notin [0; 1]$ thì $f(x)$ là hàm số đơn điệu giảm trên $[0; 1]$

Cả hai trường hợp này thì $\text{Max}f(x)$ đạt được tại $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 1$

Ta có $f(0) = 2(y^3 + z^3) - y^2z \leq 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2) = f(1)$

Như vậy $f(x) \leq f(1) = 2(y^3 + z^3) - y^2z + (2 - y - z^2)$

- Xét $g(y) = 2y^3 - zy^2 - y + 2z^3 + 2 - z^2$

$$g'(y) = 6y^2 - 2zy - 1, \quad g'(y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{6}(z - \sqrt{z^2 + 6}) < 0, y_1 \notin (0; 1) \\ y_2 = \frac{1}{6}(z + \sqrt{z^2 + 6}) \end{cases}$$

Tương tự như trên, $\text{Max}g(y)$ nếu đạt được thì xảy ra tại $y = 0$ hoặc $y = 1$

Nhưng $g(0) = 2z^3 + 2 - z^2 \leq 2z^3 + 2 - z^2 + (1 - z) = g(1)$

Nên $g(y) \leq g(1) = 2z^3 - z^2 - z + 3$

- Xét $h(z) = 2z^3 - z^2 - z + 3$

$$h'(z) = 6z^2 - 2z - 1, \quad h'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{6}(1 - \sqrt{7}) < 0 \\ z_2 = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7}) \end{cases}$$

Lập BBT, ta thấy $z \in [0; 1]$ thì $h(z_2) \leq h(z) \leq h(0) = h(1) = 3$



▪ Vậy $\text{Max}P = 3$.

Ví dụ 16: Cho $x, y, z \in [1; 4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \quad (\text{Đề TSĐH -$$

Khối A- Năm 2011)

▪ Ta đặt : $P = f(z) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}, z \in [1; 4]$

$$f'(z) = -\frac{y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{(x-y)(z^2-xy)}{(y+z)^2 \cdot (z+x)^2}, f'(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z^2 = xy \end{cases}$$

• Nếu $x = y$ thì $P = \frac{6}{5}$

• Nếu $x > y$ (vì $x \geq y$) thì $f'(z) = 0$ khi $z = \sqrt{xy} \in [1; 4], \forall x, y \in [1; 4]$

Lập BBT ta thấy $\forall z \in [1; 4]$ thì :

$$P = f(z) \geq f(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\frac{x}{y}}{2\frac{x}{y}+3} + \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{y}}+1}$$

▪ Lại đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$, do $1 < \frac{x}{y} \leq 4$ nên $1 < t \leq 2$

$$\text{Xét } g(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{t+1}, 1 < t \leq 2$$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{-8t^4 + 6t^2(t-2) + 6(t-3)}{(2t^2+3)^2 \cdot (t+1)^2} < 0, \forall t \in (1; 2]$$

suy ra $g(t)$ là hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(1; 2]$

$$\text{vì vậy : } 1 < t \leq 2 \Rightarrow g(t) \geq g(2) = \frac{34}{33}$$

▪ Tóm lại $P = f(z) \geq f(\sqrt{xy}) = g(t) \geq \frac{34}{33}$, Dấu (=) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{xy} \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$. Vậy

$$\text{Min}P = \frac{34}{33}$$

Ví dụ 17: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz + x + z = y$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{x^2+1} + \frac{2}{y^2+1} + \frac{3}{z^2+1}$$

▪ Giả thiết : $x + z = y(1 - xz) > 0 \Rightarrow 1 - xz > 0$ hay $x < \frac{1}{z}$ và $y = \frac{x+z}{1-xz}$

$$\text{Thay vào ta có } P = \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{z^2+1} + \frac{2(x+z)^2}{(1+x^2)(1+z^2)} - 2$$



- Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{(x+z)^2}{(1+x^2)(1+z^2)}$ với biến $0 < x < \frac{1}{z}$ và z coi là tham số ($z > 0$)

$$f'(x) = \frac{-2z(x^2 + 2zx - 1)}{(1+x^2)^2(1+z^2)} ; f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2zx - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - \sqrt{z^2 + 1} \\ x_0 = -z + \sqrt{z^2 + 1} \in \left(0; \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

Qua x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ (+) sang (-) nên $f(x)$ đạt GTLN tại x_0
 $\Rightarrow \max_{0 < x < \frac{1}{z}} f(x) = f(x_0) = 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}$

- Lúc đó $P = 2f(x) - 2 + \frac{3}{z^2+1} \leq 2\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right) - 2 + \frac{3}{z^2+1} = \frac{2z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3}{z^2+1} = g(z)$

$$\text{Xét hàm số } g(z) = \frac{2z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3}{z^2+1} \text{ với } z > 0 \Rightarrow g'(z) = \frac{2(1-8z^2)}{(z^2+1)^2(3z+\sqrt{z^2+1})}$$

Với $z > 0$ thì $g'(z) = 0$ tại $z_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ và qua z_0 thì $g'(z)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $g(z_0)$ là giá trị cực đại

$$\Rightarrow P \leq g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{10}{3}$$

- Vậy $\max P = \frac{10}{3}$ khi $z = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, suy ra $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$

Bài tập tương tự:

1. Xét hàm số : $f(x; y) = (1-x)(2-y)(4x-2y)$ trên miền $D = \{(x; y) / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên D .

2. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện ; $21xy + 2yz + 8zx \leq 12$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$.

năm 2012

BÌNH KHIÊM

Tam Kỳ, ngày 20 tháng 03

TỔ TOÁN - TIN
THPT CHUYÊN NGUYỄN



THAM LUẬN
TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ
ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ
NGHIỆM.

Đi từ bài toán chứa tham số quen thuộc và không khó đối với học sinh bậc THPT là bài toán tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thực, nhưng nếu là tìm tham số để phương trình có nghiệm trên một khoảng nào đó là điều không dễ... Bài toán tìm điều kiện của tham số để PT, BPT và hệ PT, hệ BPT có nghiệm lại càng khó hơn bởi sự đa dạng và đặc thù của nó. Để giải được các dạng bài tập này, đòi hỏi học sinh có trình độ tư duy logic và linh hoạt để lựa chọn phương pháp giải phù hợp với từng bài toán. Chính vì vậy mà nó thường được chọn để đánh giá học sinh qua các kì thi vào các trường đại học, cao đẳng hay các kì thi chọn học sinh giỏi các cấp. Bài viết này chỉ thể hiện một vài phương pháp giúp học sinh giải quyết được một số bài toán trên.

1. Phương pháp hàm số:

+ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

+ Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của hàm số $y = f(x)$.

Lưu ý:

+ Vấn đề đặt ra là khi nào sử dụng phương pháp hàm số để giải bài toán dạng này? Trong nhiều bài toán dẫn về việc khảo sát tam thức bậc hai trên một đoạn nào đó. Để thấy rằng, việc lựa chọn phương pháp hàm số tránh được tình trạng bỏ sót trường hợp như việc xét dấu tam thức bậc hai.

+ Với phương pháp này, việc nhằm nghiệm cũng hết sức quan trọng trong một số bài toán. Ta xét các bài toán sau:

Bài toán 1:

Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$ (Trích đề TSDH khối A-2007)

Giải:

Điều kiện: $x \geq 1$

Ta biến đổi phương trình về dạng:

$$m = -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}}$, vì $x \geq 1$ nên $0 \leq t < 1$.

Điều này tương đương với m thuộc tập giá trị của hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t$, $0 \leq t < 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $[0;1)$ ta được tập giá trị là $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \leq \frac{1}{3}$.

Bài toán 2: (Trích đề thi đại học Khối A-2008)

Tìm m để phương trình sau đây có đúng hai nghiệm thực

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + \sqrt{6-x} = m$$

Giải:

Điều kiện: $0 \leq x \leq 6$. Đặt vế trái của phương trình là $f(x)$, $x \in [0;6]$. Ta có:



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} + \frac{1}{2\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}}, x \in (0;6)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}} \right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} \right), x \in (0;6)$$

Đặt $u(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}, v(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}}.$

Ta thấy, $u(2) = v(2) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0$

Mà $u(x), v(x)$ cùng dương trên $(0;2)$ và cùng âm trên $(2;6)$ nên ta có bảng biến thiên:

x	0	2	6
f'(x)	+ 0 -		
f(x)	$2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}$	$3\sqrt{2} + 6$	$2 + \sqrt{2}$

Suy ra các giá trị cần tìm của m là $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m < 3\sqrt{2} + 6.$

Bài toán 3: Cho phương trình $\frac{3x}{x^2 - x + 4} + \frac{x}{2x^2 - 6x + 8} = m.$ Tìm m để phương trình có nghiệm dương.

Giải : Với $x > 0$, phương trình tương đương với :

$$\frac{3}{x + \frac{4}{x} - 1} + \frac{1}{2\left(x + \frac{4}{x}\right) - 6} = m \quad (*)$$

Đặt $t = x + \frac{4}{x}$, do $x > 0 \Rightarrow t \geq 4$, ta được phương trình :

$$\frac{3}{t-1} + \frac{1}{2t-6} = m \quad (**)$$

Bài toán dẫn đến tìm điều kiện của m để phương trình (**) có nghiệm $t \geq 4$.

Đặt $f(t) = \frac{3}{t-1} + \frac{1}{2t-6}, t \geq 4.$

Xét $f'(t) = -\frac{3}{(t-1)^2} - \frac{2}{(2t-6)^2} \leq 0, \forall t \geq 4$

Bảng biến thiên :

t	4	$+\infty$
f'(t)		-
f(t)	$\frac{3}{2}$	0

Vậy, $0 < m \leq \frac{3}{2}.$

2. Phương pháp sử dụng các tính chất đặc biệt của hệ thức:

Ta có các nhận xét sau đây :



Nhận xét 1: Nếu hệ thức là chẵn đối với x mà có nghiệm $x = a$ thì nó cũng có nghiệm $x = -a$. Bởi vậy, hệ thức chẵn đối với x nếu có nghiệm duy nhất thì nghiệm đó là $x = 0$. Nếu hệ thức đối xứng đối với x và y mà có nghiệm $x = a, y = b$ thì nó cũng có nghiệm $x = b, y = a$. Bởi vậy, hệ thức đối xứng đối với x và y mà có nghiệm duy nhất (a, b) thì ta phải có $a = b$ hay $x = y$.

Nhận xét 2: Nếu khẳng định T nào đó đúng với mọi giá trị của $x \in I(a; b)$ thì khẳng định T cũng đúng khi x nhận giá trị cụ thể $x \in I(a; b)$, được chọn một cách thích hợp.

Lưu ý: Các bài tập sử dụng các nhận xét trên được trình bày theo phương pháp điều kiện cần và đủ.

Sau đây là một số bài toán áp dụng :

Bài toán 4: Tìm a để với mọi b , hệ phương trình sau đây có ít nhất một nghiệm :

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^a + (b^2 + 1)^y = 2 & (1) \\ a + bxy + x^2y = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải : Giả sử tồn tại a để hệ có nghiệm với mọi b , khi đó, từ phương trình (2) ta xem b là ẩn thì nó có vô số nghiệm. Suy ra:

$$\begin{cases} xy = 0 \\ a + x^2y = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Ngược lại, với $a=1$ thì dễ dàng suy ra hệ có nghiệm $x=y=0$ với mọi b .

Vậy $a=1$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 5: Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y - m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Giải :

Nhận xét rằng, khi thay x bởi $(-x)$, hệ đã cho không đổi. Do đó nếu hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$

thì hệ cũng có nghiệm $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \beta \end{cases}$

Giả sử hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ thì $\alpha = -\alpha, \Rightarrow \alpha = 0$

Suy ra $x = 0, y = \pm 1$. Suy ra $m=0$ hoặc $m=2$.

Ngược lại, khi $m=0$ thì hệ viết lại dạng:

$$\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y & (a) \\ x^2 + y^2 = 1 & (b) \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình (b), có: $-1 \leq y \leq 1$ và $0 \leq |x| \leq 1 \Rightarrow |x|(1 - |x|) \geq 0$.

Từ phương trình (a) ta cũng có: $y = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|) \geq 2^0 + 0 = 1$

Từ các đánh giá trên đối với y , ta thu được $y=1$.

Thay vào (b) ta được $x=0$. Dễ thấy $(0;1)$ thỏa (*).

Vậy với $m=0$ hệ có nghiệm duy nhất.

Khi $m=2$, ta thấy hệ có ít nhất hai nghiệm phân biệt là $(0;-1), (1;0)$. Do đó $m=2$ không thỏa mãn.



Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài toán 6:

Tìm m để mọi $x \in [-4; 6]$ đều là nghiệm của bất phương trình sau:

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x + m \quad (*)$$

Giả sử $(*)$ đúng với mọi $x \in [-4; 6]$, khi đó $(*)$ cũng đúng với $x = 1$.

$$\text{Hay } \sqrt{(4+1)(6-1)} \leq 1^2 - 2 \cdot 1 + m \Rightarrow m \geq 6$$

Ngược lại, với $m \geq 6$ và $x \in [-4; 6]$, ta có $x+4 \geq 0; 6-x \geq 0$ nên

$$\begin{cases} \sqrt{(x+4)(6-x)} \leq \frac{4+x+6-x}{2} = 5 \\ x^2 + 2x + m = (x-1)^2 + m - 1 \geq 0 + 6 - 1 = 5 \end{cases}$$

Vậy, $m \geq 6$ thì $(*)$ đúng với mọi $x \in [-4; 6]$.

Bài toán 7: Tìm a để bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 1 \leq a(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3$ $(*)$ có nghiệm.

Giải:

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1.$$

Với điều kiện đó ta có $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} > 0$ nên:

$$(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 (x^3 + 3x^2 - 1) \leq a(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^3 = a$$

$$\Leftrightarrow a \geq (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 (x^3 + 3x^2 - 1) := f(x)$$

$(*)$ có nghiệm khi $a \geq \min f(x)$, với $x \geq 1$.

$$\text{Với } x \geq 1, \text{ ta có } \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^3 \geq (1+0)^3 = 1 > 0 \\ x^3 + 3x^2 - 1 \geq 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geq 3 = f(1)$$

Suy ra $\min f(x) = 3$ với $x \geq 1$. Vậy $a \geq 3$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự:

1/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực

$$\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} = x - 1$$

2/ Tìm m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = m$$

3/ Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm thực

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

5/ Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + |y| = m \\ \sqrt{y^2 + 2} + |x| = m \end{cases}$$

6/ Tìm a để với mọi b hệ phương trình sau luôn có ít nhất một nghiệm



$$\begin{cases} (a-1)x^5 + y^5 = 1 \\ e^{bx} + (a+1)by^4 = a^2 \end{cases}$$

7/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - \sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 2m$$

8/ Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x} + \sqrt{4+x} - m\sqrt{4-x} \leq 3m$$

Tam Kỳ, ngày 20 tháng 03 năm 2012
TỔ TOÁN - TIN
THPT CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM