

SINH HOẠT CHUYÊN MÔN CỤM 6 – BỘ MÔN TOÁN
ĐỢT SINH HOẠT NGÀY 29/03/2012 TẠI TRƯỜNG THPT LÊ QUÝ ĐÔN

=====

THAM LUẬN CỦA TỔ TOÁN TRƯỜNG THPT NGUYỄN HUỆ
ĐỀ TÀI: MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ
BÀI TOÁN GIẢI TÍCH TỔ HỢP VÀ SỐ PHỨC.

*** Mục đích yêu cầu:**

Nhằm giúp các em học sinh ôn thi Đại học – Cao Đẳng tốt hơn, chúng tôi xin nêu ra một số dạng toán cơ bản và mở rộng về các vấn đề nói trên.

A. MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ:

1. Một số dạng cơ bản:

Dạng 1: Cho $y = f(x)$; (C_1) và $y = g(x;m)$ (C_2) .

Biện luận theo tham số m số giao điểm của (C_1) và (C_2) .

Phương pháp giải:

B1: Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) : $f(x) = g(x;m)$ (1)

B2: Biến đổi phương trình (1) về phương trình quen thuộc rồi biện luận theo m số nghiệm của phương trình, từ đó suy ra số giao điểm.

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu tìm m hay chứng minh thì B2 học sinh cần thay đổi cách giải cho phù hợp.

Dạng 2: Cho (C) : $y = f(x)$.

Dựa vào (C) biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình: $F(x;m) = 0$.

Phương pháp giải:

B1: Biến đổi phương trình đã cho về dạng: $f(x) = g(m)$.

B2: Đây là phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng (d) : $y = g(m)$ nên số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của (C) và (d) .

B3: Dựa vào đồ thị (C) biện luận theo m số giao điểm của (C) và (d) , từ đó suy ra số nghiệm phương trình đã cho.

Chú ý: Nếu bài toán yêu cầu tìm m để phương trình đã cho có n nghiệm phân biệt thì ở B2 học sinh cần thay đổi cách giải phù hợp.

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) : $y = f(x)$.

B1: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M_0(x_0; y_0)$ có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

B2: Tìm: x_0 ; y_0 và $f'(x_0)$ (nếu có)

B3: Kết luận

Chú ý: Nếu gặp bài toán viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M_1(x_1; y_1)$ thì HS ban nâng cao có thể giải theo phương pháp dùng điều kiện tiếp xúc.

Dạng 4: Điều kiện để hàm số có cực trị; đồng biến, nghịch biến trên một khoảng.

Phương pháp giải:

B1: Tìm TXĐ

B2: Tính y'

B3: Lập luận tìm m tùy theo yêu cầu đơn điệu hay cực trị của hàm số.

Dạng 5: Mở rộng các dạng trên bằng cách lồng ghép một số điều kiện giải tích, điều kiện hình học như khoảng cách, diện tích tam giác, tính thẳng hàng, tính đối xứng, tính vuông góc...

Phương pháp giải:

B1: Học sinh vận dụng các bước giải của các dạng trên.

B2: Khai thác các điều kiện giải tích, hình học của đề.

B3: Kết luận.

2. Một số bài tập minh họa:

a) Hàm số bậc ba:

Bài 1: (A-2002) Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.

2. Tìm k để phương trình: $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

* Hướng dẫn: Giải theo dạng 2

* Đáp số: $-1 < k < 3$; $k \neq 0$; $k \neq 2$.

Chú ý: Giải bất phương trình: $0 < -k^3 + 3k^2 < 4$ nên dùng đồ thị (C) để giải.

Bài 2: (B-2003) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1)

Tìm m để hàm số (1) có 2 điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

* Hướng dẫn: Ycbt $\Leftrightarrow$ pt: $f(x) = -f(-x)$ có nghiệm khác 0.

* Đáp số: $m > 0$

Bài 3: (D-2005) Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (1)

Gọi $M \in (C_m)$ có hoành độ bằng -1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

* Hướng dẫn: B1: Giải theo các bước của dạng 3.

B2: Lập luận tìm m .

* Đáp số: $m = 4$

Bài 4: (A-2006) Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 + 9x^2 + 12|x| = m$

* Hướng dẫn: B1: Từ (C) suy ra đồ thị hàm số $y = 2|x|^3 + 9x^2 + 12|x| - 4$

B2: Thực hiện theo dạng 2.

* Đáp số: $4 < m < 5$

Bài 5: (D-2006) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Gọi (d) là đường thẳng qua $A(3;20)$ và có hệ số góc m . Tìm m để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

* Hướng dẫn: B1: Viết phương trình của (d): $y = m(x-3) + 20$.

B2: Thực hiện theo các bước dạng 1.

* Đáp số: $m > \frac{15}{4}$ và $m \neq 24$.

Bài 6: (B-2007) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị này cách đều gốc O.

* Hướng dẫn: $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 - m$ hoặc $x = 1 + m$

* Đáp số: $m = \pm \frac{1}{2}$.

Bài 7: (B-2008) Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1).

Viết phương trình tiếp tuyến của (1) biết tiếp tuyến đi qua $M(-1;-9)$.

* Hướng dẫn: Giải theo dạng 3 hoặc dùng điều kiện tiếp xúc.

* Đáp số: $y = 24x + 15$; $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$

Bài 8: (D-2008) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (1).

Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua $I(1;2)$ với hệ số góc k , $k > -3$ đều cắt đồ thị (1) tại 3 điểm phân biệt I, A, B đồng thời I là trung điểm đoạn AB.

* *Hướng dẫn:* B1: (d): $y = k(x-1) + 2$

B2: Giải theo dạng 1: $(x-1)(x^2 - 2x - k - 2) = 0$

B3: Chứng minh yêu cầu đề toán

Bài 9: (A-2010) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + m$ (1).

Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$$

* *Hướng dẫn:* B1: Giải theo dạng 1: $(x-1)(x^2 - x - m) = 0$

B2: Dùng định lý Vi-ét

* Đáp số: $-\frac{1}{4} < m < 1$ và $m \neq 0$

Bài 10: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ (1)

Tìm m để hàm số (1) đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$

* *Hướng dẫn:* Giải theo dạng 4.

* Đáp số: $m \geq 2$

Bài 11: Cho (C_m) : $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$

Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng $y = 1$ tại 3 điểm phân biệt $C(0;1)$, D, E và các tiếp tuyến tại D và E vuông góc với nhau.

* *Hướng dẫn:* B1: Thực hiện theo dạng 1.

B2: $Y_{cbt} \Leftrightarrow y'_{(xD)} \cdot y'_{(xE)} = -1$

* Đáp số: $m = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{8}$

Bài 12: (C_m) : $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^2 + 1$

Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

* *Hướng dẫn:* $Y_{cbt} \Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu và 2 điểm này nằm khác phía đối với trục hoành $\Leftrightarrow f(m-1) \cdot f(m+1) < 0$.

* Đáp số: $-\sqrt{3} < m < -1$; $1 - \sqrt{2} < m < 1$; $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$.

Bài 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2+2m-3)x + 4$.

Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu ở về hai phía của trục tung.

* *Hướng dẫn:* $Y_{cbt} \Leftrightarrow y'$ có 2 nghiệm trái dấu

* Đáp số: $-3 < m < 1$.

Bài 14: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2$

Tìm m để đồ thị hàm số cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

* *Hướng dẫn:* B1: Thực hiện theo dạng 1.

B2: Phương trình $x^2 + (m-1)x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1.

* Đáp số: $m > 7$.

Bài 15: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$.

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu x_1, x_2 thỏa $x_1 + 2x_2 = 1$.

* *Hướng dẫn:* B1: Thực hiện theo dạng 4

B2: Áp dụng định lý Vi-ét

* Đáp số: $m = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{3}$.

Bài 16: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$

Tìm m để đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

* *Hướng dẫn:* B1: Giải theo dạng 4.

B2: Gọi 2 điểm cực trị: $M(0; \frac{1}{2}m^3)$, $N(m; 0)$

$$M, N \text{ đối xứng nhau qua đường thẳng } y = x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}m^3 = m \\ m \neq 0 \end{cases}$$

* Đáp số: $m = \pm \sqrt{2}$

Bài 17: Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2(m+1)x$

Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu x_1, x_2 thỏa $(x_1 - x_2)^2 = 8(m+1)$

* *Hướng dẫn:* B1: Giải theo dạng 4:

B2: Dùng định lí Vi-ét

* Đáp số: $m=1$

b) Hàm số trùng phương:

Bài 1: (B-2002) Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2-9)x^2 + 10$ (1)

Tìm m để đồ thị (1) có 3 cực trị.

* *Hướng dẫn:* B1: Giải theo dạng 4

B2: Lập luận tìm m

* Đáp số: $m < -3$ hoặc $0 < m < 3$

Bài 2: (B-2009) Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Tìm m để phương trình: $x^2|x^2 - 2| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

* *Hướng dẫn:* B1: Biến đổi phương trình đã cho về $|2x^4 - 4x^2| = 2m$

B2: Giải theo dạng 2

* Đáp số: $0 < m < 1$

Bài 3: (D-2009) Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ (C_m).

Tìm m để đường thẳng $y = -1$ cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

* *Hướng dẫn*: B1: Giải theo dạng 1.

B2: Lập luận tìm m.

* Đáp số: $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$

Bài 4: (D-2010) Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$ (C) .

Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

* *Hướng dẫn*: Giải theo dạng 3

* Đáp số: $y = -6x + 10$

Bài 5: Cho hàm số $y = x^4 - 3(m+1)x^2 + 3m + 2$ (C_m) .

Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

* *Hướng dẫn*: Giải theo dạng 1.

* Đáp số: $m > -\frac{2}{3}$ và $m \neq -\frac{1}{3}$.

Bài 6: Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm thực phân biệt: $10^{x^4 - 6x^2 + 5} = m$

* *Hướng dẫn*: Giải theo dạng 2: Phương trình $\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 5 = \log m$

* Đáp số: $\frac{1}{10000} < m < 100000$

Bài 7: Cho hàm số $y = 2mx^4 - x^2 - 4m + 1$.

Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực tiểu và khoảng cách giữa chúng bằng 5.

* Đáp số: $m = \frac{1}{25}$

Bài 8: (B-2011) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1); m là tham số

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

* *Hướng dẫn*: Giải theo dạng 5

B1: Tính $y' = 4x(x^2 - m - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases}$$

B2: Với $m > -1$ thì đồ thị có ba điểm cực trị $A(0;m)$; $B(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1)$;

$C(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1)$

B3: $OA = BC \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$

c) Hàm số nhất biến:

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ (C)

Xác định m để đường thẳng (d): $y = -x + 4$ cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho độ dài đoạn AB ngắn nhất

* *Hướng dẫn:* B1: Giải theo dạng 1.

B2: Dùng định lý Vi-ét tính độ dài AB theo m.

* *Đáp số:* $m = 0$

Bài 2: (D-2007) Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ (C).

Tìm $M \in (C)$, tiếp tuyến của (C) tại M cắt Ox, Oy tại A, B mà diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{4}$.

* *Hướng dẫn:* +B1: Giải theo dạng 3: $y = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$

+B2: $A(-x_0^2; 0) \quad B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$

+B3: $S_{OAB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x_0^2 = |x_0+1| \quad (x_0 \neq -1)$

* *Đáp số:* $M(-\frac{1}{2}; -2)$ hoặc $M(1; 1)$

Bài 3: (A-2009) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (C)

Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B là tam giác OAB cân tại O (O là gốc tọa độ)

* *Hướng dẫn:* B1: Ycbt $\Leftrightarrow$ tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = x$; $y = -x$.

B2: Giải theo dạng 3.

* *Đáp số:* $y = -x - 2$.

Bài 4: (B-2010) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C)

Tìm m để đường thẳng $y = -2x+m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{3}$.

* *Hướng dẫn:* B1: Giải theo dạng 1

B2: Diện tích tam giác OAB = $\frac{1}{2} AB \cdot d(O; AB) = \frac{|m|\sqrt{m^2+8}}{4}$

* *Đáp số:* $m = \pm 2$.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ (C)

Tìm $M \in (C)$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C).

* *Đáp số:* $(3+\sqrt{5}; 1+\sqrt{5})$; $(3-\sqrt{5}; 1-\sqrt{5})$

Bài 6: (A-2011) Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ (C).

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B, và k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

* *Hướng dẫn*: Giải theo dạng 1

B1: Biến đổi phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng đã cho về dạng thu gọn $2x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (*)

B2: Chứng minh (*) có hai nghiệm phân biệt, $\forall m \in \mathbb{R}$.

B3: Biến đổi $k_1 + k_2 = \frac{1}{(2x_1 - 1)^2} - \frac{1}{(2x_2 - 1)^2} = \frac{4(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) + 2}{[4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1]^2}$

B4: Dùng định lý Vi-et biến đổi $k_1 + k_2 = -4m^2 - 8m - 6$

B5: Lập luận tìm được $m = -1$

Bài 7: (D-2011) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C).

Tìm k để đường thẳng $y = kx + 2k + 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

* *Hướng dẫn*: Giải theo dạng 1

B1: Biến đổi phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng đã cho về dạng thu gọn $kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0$ (1)

B2: d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

B3: Khi đó $A(x_1; kx_1 + 2k + 1); B(x_2; kx_2 + 2k + 1)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (1)

$$\begin{aligned} B4: d_{(A; Ox)} = d_{(B; Ox)} &\Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1| \\ &\Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \quad (\text{do } x_1 \neq x_2) \end{aligned}$$

B5: Dùng định lý Vi-et tìm được $k = -3$

B. CÁC BÀI TOÁN GIẢI TÍCH TỔ HỢP

I. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÉP ĐẾM KHÔNG LẶP, ĐỊNH NGHĨA TỔ HỢP, CHỈNH HỢP

Trong phép đếm không lặp, mỗi yếu tố cấu thành nên phần tử cần đếm chỉ xuất hiện tối đa một lần, không có sự lặp lại.

- Hai quy tắc chính để giải các bài toán về phép đếm là: Quy tắc cộng và quy tắc nhân.

- Hai phương pháp chính để giải các bài toán về phép đếm là:

o Phương pháp trực tiếp.

o Phương pháp gián tiếp.

A. Phương pháp trực tiếp:

Để sử dụng phương pháp trực tiếp ta chủ yếu dùng quy tắc cộng và quy tắc nhân, hai quy tắc này thường sử dụng đồng thời, đan xen lẫn nhau.

B. Phương pháp gián tiếp:

Phương pháp này dựa trên nguyên lý “đếm những cái không cần đếm, để biết những cái cần đếm”, tức là phương pháp lấy phần bù trong tập hợp.

C. Các dạng bài tập:

Dạng 1: Sử dụng phương pháp trực tiếp

Ví dụ 1: Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì thư đã chọn. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

- Chọn 3 tem thư trong 5 tem thư có C_5^3 cách chọn.
- Chọn bất kỳ 3 bì thư trong 6 bì thư có C_6^3 cách chọn.
- Dán 3 tem thư này dán lên 3 bì thư kia có 3! Cách chọn.
- Vậy có $C_5^3.C_6^3.3!=1200$ cách.

Ví dụ 2: (ĐHKB2004)

Trong 1 môn học thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Giải:

- Gọi là tập hợp các cách chọn đề có 3 câu hỏi dễ, một câu hỏi khó, 1 câu hỏi trung bình.
- Gọi B là tập hợp các cách chọn đề có 2 câu hỏi dễ, 2 câu hỏi khó, 1 câu hỏi trung bình

- Gọi C là tập hợp các cách chọn đề có 2 câu hỏi dễ, 1 câu hỏi khó, 2, câu hỏi trung bình
- Ω là tập hợp các cách chọn theo yêu cầu đề bài
- Vì A, B, C đôi một không giao nhau, nên: $|\Omega| = |A| + |B| + |C|$
 $|A| = C_{15}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_{10}^1 = 22750$
 $|B| = C_{15}^2 \cdot C_5^2 \cdot C_{10}^1 = 10500$
 $|C| = C_{15}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_{10}^2 = 23625$
- Vậy $|\Omega| = 56875$.

Ví dụ 3: a) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ? ĐS: 42000

b) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác 0). ĐS: 64800

Ví dụ 4: (ĐHKB2005)

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam, 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam, 1 nữ? ĐS: 207900

Dạng 2: Phương pháp gián tiếp

Ví dụ 1: (ĐHKA2002)

Đội tuyển học sinh giỏi của trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em được chọn?

ĐS:

$$C_{18}^8 - (C_{13}^8 + C_{11}^8 + C_{12}^8) = 41811.$$

Ví dụ 2: (ĐHKD2006)

Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp T, 4 học sinh lớp L và 3 học sinh lớp H. Cần chọn 4 học sinh tham gia trực tuần, sao cho 4 học sinh đó thuộc không quá 2 trong 3 lớp nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

$$\text{ĐS: } C_{12}^4 - (C_5^2 C_4^1 C_3^1 + C_5^1 C_4^2 C_3^1 + C_5^1 C_4^1 C_3^2)$$

Ví dụ 3:

Một hộp đựng 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. người ta chọn ra 4 bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không đủ 3 màu?

$$\text{ĐS: } C_{15}^4 - (C_4^2 C_5^1 C_6^1 + C_4^1 C_5^2 C_6^1 + C_4^1 C_5^1 C_6^2)$$

Ví dụ 4:

Cho hình thập giác lồi. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của thập giác lồi, nhưng 3 cạnh không phải là 3 cạnh của thập giác lồi?

ĐS: 50

II. CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC TỔ HỢP, CHÍNH HỢP:

Phương pháp:- Dựa trực tiếp vào các công thức C_n^k, A_n^k, P_n và các công thức thường được sử dụng: $C_n^k = C_n^{n-k}$ và $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$
 - Phân tích, rút gọn giai thừa.

Ví dụ 1: (ĐH Thủy Lợi 99)

CMR: Với k, n là số tự nhiên và $3 \leq k \leq n$, ta luôn có:

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

HD: Sử dụng $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

$$VT = (C_n^{k-3} + C_n^{k-2}) + 2(C_n^{k-2} + C_n^{k-1}) + (C_n^{k-1} + C_n^k).$$

Ví dụ 2: (ĐHQG Hà Nội 99)

CMR với mọi số nguyên k, n thỏa điều kiện $2 \leq k \leq n$. Ta có:

$$k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

Giải:

$$\begin{aligned} VP &= n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\ &= k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = k(k-1)C_n^k = VT \end{aligned}$$

Ví dụ 3: (ĐHKB2008)

Cho n nguyên dương và k nguyên ($0 \leq k \leq n$). Chứng minh:

$$\frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}$$

HD: Ta có

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^k}{C_{n+1}^k C_{n+1}^{k+1}} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{C_{n+2}^{k+1}}{C_{n+1}^k C_{n+1}^{k+1}} \end{aligned}$$

Sử dụng công thức C_n^k và biến đổi được đpcm.

Ví dụ 4: Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có

$$\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}$$

Ví dụ 5: Chứng minh với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta có

$$P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + (n-1)P_{n-1}, \text{ với } P_k \text{ là số hoán vị } k \text{ phần tử, } k=1,2,\dots,n$$

HD: $P_k - P_{k-1} = k! - (k-1)! = (k-1)(k-1)! = (k-1)P_{k-1}$

Ví dụ 6: (ĐHKD2005)

Tính giá trị biểu thức $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng:

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$$

III. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN SỐ TỔ HỢP, SỐ CHỈNH HỢP:

Phương pháp: Thực hiện các bước sau:

- Đặt điều kiện để pt, bpt có nghĩa. Lưu ý: A_n^k, C_n^k có nghĩa khi n, k là các số nguyên thỏa $n > 0, 0 \leq k \leq n$.
- Sử dụng các công thức C_n^k, A_n^k, P_n , kĩ năng rút gọn giai thừa đưa phương trình đã cho về các phương trình đại số.
- Tìm nghiệm và đối chiếu với điều kiện.

Ví dụ 1: (CĐSP TP HCM 99)

Tìm số tự nhiên k thỏa mãn hệ thức: $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$.

Giải: ĐK $\begin{cases} 0 \leq k \\ k+2 \leq 14 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{N}$

Ta có $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{14!}{k!(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!(12-k)!} = 2 \cdot \frac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 \\ k = 4 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện và kết luận $k=8$ và $k=4$.

Ví dụ 2: (ĐHBK Hà Nội Khối A, 2000). Giải BPT sau: $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 2x \geq 2 \\ x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 3, x \in \mathbb{N} \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x} \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} + 10$$

$$\Leftrightarrow 3x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Đối chiếu đk, kết luận: $x=3$ và $x=4$.

Ví dụ 3: (ĐHKB 2006)

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập hợp con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập hợp con gồm 2 phần tử của A .

1/ Tìm n

2/ Tìm $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

HD: 1/ Theo đề ta có pt: $C_n^4 = 20C_n^2$, giải pt tìm được $n = 18$.

2/ Số tập con gồm k phần tử của A là C_{18}^k

- Xét BPT $C_{18}^k < C_{18}^{k+1}$, giải tìm được $k=1, 2, \dots, 8$.
- Suy ra $C_{18}^k > C_{18}^{k+1}$, tìm được $k=9, 10, 11, \dots, 17$
- Do đó, $C_{18}^1 < C_{18}^2 < \dots < C_{18}^8 < C_{18}^9 > C_{18}^{10} > C_{18}^{11} > \dots > C_{18}^{18}$

- Vậy số tập con gồm 9 phần tử của A là lớn nhất.

Ví dụ 4: Tìm các số x nguyên dương thỏa mãn phương trình:

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x \quad \text{ĐS: } x = 7$$

Ví dụ 5: Giải pt: $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \frac{24}{23}$ ĐS n = 5

Ví dụ 6: Giải Bpt: $C_{x-1}^4 - C_{x-1}^3 - \frac{5}{4}A_{x-2}^2 < 0$ ĐS: S = {5,6,7,8,9,10}

Ví dụ 7: $\begin{cases} A_n^m + 3C_n^m = 90 \\ A_n^m - 2C_n^m = 40 \end{cases}$ ĐS: n = 5, m = 3

Ví dụ 8: $\begin{cases} A_x^2 + C_4^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases}$ ĐS: x = 4, y = 5

IV. SỬ DỤNG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON:

Công thức $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (1)$

*Trong trường hợp giải toán ta thường dùng các kết quả đặt biệt sau:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n$$

Đặc biệt hơn ta có:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Trong đó vế phải của (1) là tổng n+1 số hạng. Số $C_n^k a^{n-k} b^k$ là số hạng thứ k+1 của tổng ấy, (k = 0,1,2...n). Các bài toán thuộc chủ đề này là một dạng toán hay gặp. nó thường có dạng sau:

Các dạng toán cơ bản:

Loại 1: Các bài toán kết hợp với các phép biến đổi đại số.

Thí dụ 1: (Đề tuyển sinh đại học KD-2008).

Tìm n là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức sau: $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$.

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = (1+x)^{2n}$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton: $f(x) = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$

Từ đó ta có : $f(1) = \dots\dots\dots(1)$
 $f(-1) = \dots\dots\dots(2)$

Trừ từng vế (1) cho (2) ta đi đến $2^{2n} = 2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1})(3)$

Từ (3) và giả thiết suy ra $n = 6$.

Ví dụ 2: (Đề tuyển sinh đại học KD-2002)

Tìm n để có hệ thức : $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$

Hướng dẫn:

Xét hàm số $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$
 $f(2) = 3^n = \dots\dots\dots = 3^5(1) \Rightarrow n = 5$

Ví dụ 3:

Khai triển $(1+x+x^2+x^3)^5$ thành đa thức $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{15} x^{15}$.

Tính $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$.

Hướng dẫn:

$f(x) = (1+x+x^2+x^3)^5 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{15} x^{15}$.

$f(1) = 4^5 = 1024 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$.

Ví dụ 4: (Đề tuyển sinh cao đẳng khối A&B-2005).

Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có: $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$

Hướng dẫn:

Xét hàm số $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$

Ta có : $f^2(x) = (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^n x^n + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}(1)$.

Mặt khác:

$f^2(x) = (1+x)^n \cdot (1+x)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) \cdot (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n)(2)$

Hệ số của x^n ở vế phải của (1) là C_{2n}^n .

Hệ số của x^n ở vế phải của (2) dựa vào phép nhân của hai đa thức.

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Loại 2: Tìm hệ số của x^k trong một khai triển nhị thức Newton:

Phương pháp:

- Viết khai triển Newton (1) với a, b được chọn từ đề bài. Trong một số trường hợp có thể phải xác định số n trước.

- Từ (1) sử dụng số hạng thứ $k+1$: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ của khai triển và yêu cầu của đề bài để thiết lập một phương trình mà ẩn của nó thường là k .

- Từ nghiệm tìm được sẽ cho ta kết quả cần tìm.

Ví dụ 1: (ĐHKB 2007) Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển nhị thức $(2+x)^n$ biết rằng:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$$

Hướng dẫn: Áp dụng:

$$2^n = (3-1)^n = 3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Công thức số hạng tổng quát $T_{k+1} = C_{11}^k 2^k x^{11-k}$. Từ đó: $k = 1$ và đó là số

$$C_{11}^1 2^1 = 22$$

Ví dụ 2: (ĐHKD2004)

Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ với $x > 0$

Giải:

$$\text{Số hạng thứ } k+1: T_{k+1} = C_7^k x^{\frac{k}{3} + \frac{k-7}{4}} = C_7^k x^{\frac{7k-21}{12}}$$

Số hạng không chứa x nên $7k - 21 = 0 \Leftrightarrow k = 3$

Vậy số hạng không chứa x là số hạng ứng với $k = 3$, đó là $C_7^3 = 35$.

Ví dụ 3: (ĐHKD2007)

Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức: $P = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

Giải:

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\text{Số hạng thứ } k+1 \text{ của } P \text{ là } T_{k+1} = x.C_5^k (-2x)^k + x^2.C_{10}^k (3x)^k$$

$$\text{Suy ra số hạng chứa } x^5 \text{ của } P \text{ là: } x.C_5^4 (-2x)^4 + x^2.C_{10}^3 (3x)^3 = x^5(16C_5^4 + 27C_{10}^3)$$

Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là $16.5 + 27.120 = 3320$.

Ví dụ 4: (ĐHKA2006).

Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)$ biết rằng

$$C_{2n+1}^k + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

Ví dụ 5: Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển:

$$S(x) = (1+2x)^3 + (1+2x)^4 + (1+2x)^5 + \dots + (1+2x)^{22}$$

Ví dụ 6: (ĐH 2002)

Đa thức $P(x) = (1+x+x^2)^{10}$ được viết lại dưới dạng $a_0 + a_1x + \dots + a_{20}x^{20}$. Tìm a_4 .

Ví dụ 7: Tìm hệ số của x^{2008} trong khai triển Newton của đa

$$\text{thức: } f(x) = (x^2 - 2)^{670} (x+1)^{670}$$

Loại 3: Các bài toán kết hợp việc sử dụng tính đạo hàm và tích phân:

**Với loại bài tập này sau khi chọn được hàm số $f(x)$ thích hợp ta tiến hành lấy đạo hàm (hoặc tích phân) hàm số đã chọn theo hai cách:*

- Lấy đạo hàm (hoặc tích phân) trực tiếp hàm số đã cho
 - Lấy đạo hàm (hoặc tích phân) sau khi đã sử dụng khai triển nhị thức Newton hàm số $f(x)$ đã chọn (đĩ nhiên ở đây $f(x)$ có dạng có thể dùng công thức khai triển nhị thức Newton).

- Với phép lấy đạo hàm, ta lựa chọn một giá trị phù hợp cho x , rồi thay vào hai biểu thức và tính đạo hàm. Với phép tính tích phân thì chọn hai cận tích phân thích hợp. Các giá trị này cũng thường thấy ngay từ đề bài.

Ví dụ 1 (Đề tuyển sinh đại học KA-2007).

Cho n là số nguyên dương, chứng minh: $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$.

Giải:

$$\text{Ta có : } (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + C_{2n}^3x^3 + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n} \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 - C_{2n}^3x^3 + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n} \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra: } f(x) = C_{2n}^1x + C_{2n}^3x^3 + C_{2n}^5x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) ta có : } \int_0^1 f(x)dx = \frac{2^{2n}-1}{2n+1} \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) ta có : } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra điều phải chứng minh

Ví dụ 2: (Đề tuyển sinh đại học KA 2005).

Tìm số nguyên dương n sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = (1+x)^{2n+1} \Rightarrow f'(x) = (2n+1).(1+x)^{2n}$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^k = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1x + C_{2n+1}^2x^2 + C_{2n+1}^3x^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2x + C_{2n+1}^3x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n} \quad (2)$$

Đồng thời thay $x=-2$ vào (1) và (2) ta được:

$$2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} \quad (3)$$

Từ giả thiết và (3) suy ra $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$.

Ví dụ 3: (Đề tuyển sinh đại học KB-2003).

Cho n là số nguyên dương. Tính tổng:

$$S = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = (1+x)^n$. Ta có:

$$I = -\int_{2\pi}^0 (2\pi-1)\cos^3 t dt = \int_0^{2\pi} (2\pi-1)\cos^3 t dt \quad (1)$$

Theo công thức khai triển Newton, ta có: $f(x) = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Ví dụ 4: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$C_{2n}^0 - 2.C_{2n}^1 + 3C_{2n}^2 - 4C_{2n}^3 + \dots + (2n+1)C_{2n}^{2n} = 0$$

Hướng dẫn: Xét hàm số $f(x) = x(1+x)^{2n}$. Từ đó suy ra $f'(x) = \dots$ (1)

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$f(x) = x(C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}) = C_{2n}^0 x + C_{2n}^1 x^2 + C_{2n}^2 x^3 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n+1}$$

Từ đó suy ra $f'(x) = \dots(2)$. Thay $x = -1$ vào (1) và (2) suy ra đpcm.

Ví dụ 5:

1/Tính $\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx$

2/Chứng minh : $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3n+3}$

Hướng dẫn:

1/ $\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1+x^3)^n d(1+x^3) = \frac{2^{n+1}-1}{3n+3} (1)$.

2/Áp dụng khai triển nhị thức Newton.

$$\Rightarrow x^2 \sum_{k=0}^n (1+x^3)^n = C_n^0 x^2 + C_n^1 x^5 + C_n^2 x^8 + \dots + C_n^n x^{3n+2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3n+3}C_n^n (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức : $\left(x^3\sqrt{x} + x^{\frac{-28}{25}}\right)^{12}$ *Đáp số*

:729

Bài 2: Biết rằng tổng các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2 + 1)^n$ bằng 1024. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển trên.

Đáp số :210

Bài 3: Gọi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{11}$ là hệ số trong khai triển

$(x+1)^{10}(x+2) = x^{11} + a_1 x^{10} + a_2 x^9 + \dots + a_{10} x + a_{11}$. Tìm hệ số của a_5 . *Đáp*

số:672

Bài 4: Giả sử $(1+x+x^2+x^3)^5$ có khai triển thành đa thức $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{15} x^{15}$.

Tính $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{15}$.

Đáp số :0

Bài 5: Trong khai triển $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5})^{124}$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Đáp số

:32

Bài 6: Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức $(2-3x)^{2n}$, biết :

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$$

Đáp số

: $-C_{10}^7 \cdot 2^3 \cdot 3^7$

Bài 7: Chứng minh rằng:

Hướng dẫn: Áp dụng khai triển nhị thức Newton với $(x^2 + x)^{100}$.

Bài 8: Tổng các hệ số của khai triển $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$ là 1024. Tìm hệ số của x^6 trong khai triển đó .

:210

Bài 9: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh : $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

Hướng dẫn: Tính $\int_0^1 f(x)dx$ theo hai cách ở đây $f(x) = (1+x)^n$.

Bài 10:

1/Tính tích phân $\int_0^1 x(1-x)^n dx$

2/Chứng minh: $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2n+2}$

C. SỐ PHỨC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.

Số phức là một nội dung mới được đưa vào trong chương trình Toán học phổ thông, học sinh chỉ mới được tiếp cận ở cuối chương trình lớp 12 nên không ít học sinh còn nhiều ngỡ ngàng. Trong những năm gần đây, số phức xuất hiện hầu hết trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng. Để giúp các em ôn thi tốt hơn, chúng tôi xin giới thiệu một số dạng toán liên quan đến số phức thường gặp trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng.

Dạng 1: Các phép tính về số phức

Các bài toán thường có dạng hoặc tính toán trực tiếp một biểu thức về số phức, hoặc giải một phương trình đơn giản để tìm số phức z mà thực chất của phép giải phương trình này chỉ đòi hỏi thực hiện các phép tính về số phức.

Để giải được dạng toán này học sinh chỉ cần nắm vững các khái niệm về số phức và kỹ năng tính toán.

Ví dụ 1: Tìm phần ảo của số phức z , biết: $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i)$. **ĐH Khối A – 2010 (CB)**

Hướng dẫn: $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i) = (1 + 2\sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 5 + \sqrt{2}i \Rightarrow z = 5 - \sqrt{2}i$

Vậy số phức z có phần ảo là $-\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn: $(1 + i)^2(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z$ (1). Xác định phần thực và phần ảo của z . **CĐ Khối A, B, D – 2009 (CB)**

HD:

$$(1) \Leftrightarrow 2i(2 - i)z = 8 + i + (1 + 2i)z \Leftrightarrow (2 + 4i)z = 8 + i + (1 + 2i)z \Leftrightarrow (1 + 2i)z = 8 + i \Leftrightarrow z = \frac{8 + i}{1 + 2i} = 2 - 3i$$

Vậy số phức z có: Phần thực là -2 ; Phần ảo là -3 .

Ví dụ 3: Tìm số phức z , biết: $\bar{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$ (2). **ĐH Khối B – 2011 (CB)**

Hướng dẫn: Đk $z \neq 0$. (2) $\Leftrightarrow z\bar{z} - (5 + i\sqrt{3}) - z = 0$ (3)

Giả sử $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

$$\text{Ta có (3)} \Leftrightarrow a^2 + b^2 - a - 5 - (b + \sqrt{3})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a - 5 = 0 \\ b + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $z = -1 - \sqrt{3}i$ hoặc $z = 2 - \sqrt{3}i$.

Ví dụ 4: Tìm số phức z thỏa mãn: $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là thuần ảo. **(ĐH khối D – 2010)**

HD: Gọi $z = x + yi$, ta có $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Theo đề ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

Vậy số phức cần tìm là $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - i$.

Ví dụ 5: Tìm các số nguyên x, y sao cho số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$.

HD: $(x+yi)^3 = 18+26i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ y^3 - 3yx^2 = -26 \end{cases} \Rightarrow 18(y^3 - 3yx^2) = -26(x^3 - 3xy^2)$. Đặt $y = tx$, ta được $t = 1/3$.

Vậy $x = 3$ và $y = 1$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z biết $(1+i)^2(2-i)z = 8+i + (1+2i)z$. (**CD Khối A,B – 2009**)

Đáp số: Phần thực 2 ; Phần ảo - 3.

Bài 2. Cho số phức z thỏa mãn: $(2-3i)z + (4+i)\bar{z} = -(1+3i)^2$. Xác định phần thực và phần ảo của z .

CD Khối A,B,D – 2010 (CB)

Đáp số: Phần thực - 2 ; Phần ảo 5.

Bài 3. Tìm số phức z , biết : $z - (2+3i)\bar{z} = 1-9i$. (**ĐH Khối D – 2011 (CB)**)

Đáp số: $z = 2 - i$

Bài 4. Cho số phức z thỏa mãn $(1+2i)^2z + \bar{z} = 4i - 20$. Tính môđun của z . (**CD Khối A,B,D – 2011 (CB)**)

Đáp số: $|z| = 5$

Bài 5. Tìm tất cả các số phức z , biết : $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$. (**ĐH Khối A – 2011 (CB)**)

Đáp số: $z = 0, z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Bài 6. Tìm môđun của số phức z , biết : $(2z-1)(1+i) + (\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$. (**ĐH Khối A – 2011 (NC)**)

Đáp số: $|z| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Bài 7. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$. (**ĐH Khối B - 2009**)

ĐS: $z = 3 + 4i$ và $z = 5$.

Dạng 2: Biểu diễn hình học của số phức

Các bài toán thuộc dạng này có các dạng cơ bản sau:

- Biểu diễn hình học của số phức trên mặt phẳng Oxy.
- Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn một hoặc vài điều kiện nào đó cho trước.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-(3-4i)| = 2$ (1). (**ĐH Khối D – 2009**)

Hướng dẫn: Giả sử $z = x+yi, x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow |(x-3) + (y+4)i| = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 = 4$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z đã cho là đường tròn tâm $I(3; -4)$, bán kính $R = 2$.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - i| = |(1+i)z|$. (**ĐH Khối B - 2010**)

Hướng dẫn: Giả sử $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Ta có: $z - i = x + (y-1)i$ và $(1+i)z = (x - y) + (x + y)i$.

$$\text{Khi đó } |z - i| = |(1+i)z| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = 2$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(0; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức

$$\omega = (1 + i\sqrt{3})z + 2, \text{ biết rằng số phức } z \text{ thỏa mãn điều kiện } |z - 1| \leq 2.$$

Hướng dẫn: Giả sử $z = a + bi$. Từ điều kiện $|z - 1| \leq 2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 \leq 4$

$$\text{Giả sử } \omega = x + yi. \text{ Từ } \omega = (1 + i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow x + yi = a - b\sqrt{3} + 2 + (a\sqrt{3} + b)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b\sqrt{3} + 2 \\ y = a\sqrt{3} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = a - 1 - b\sqrt{3} \\ y - \sqrt{3} = (a - 1)\sqrt{3} + b \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4[(a-1)^2 + b^2] \leq 16$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức ω là hình tròn tâm $I(3; \sqrt{3})$ và bán kính $R = 4$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$. **ĐS:** Đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$

b) $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$. **ĐS:** Trục Ox.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 4| + |z + 4| = 10$.

ĐS: Elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Dạng 3: Phương trình bậc hai trên tập số phức

Các dạng toán thường gặp:

- Giải phương trình bậc hai hoặc phương trình quy về bậc hai.

- Tính giá trị của một biểu thức liên quan đến nghiệm của phương trình bậc hai.

Để giải được dạng toán này học sinh cần nắm vững cách giải phương trình bậc hai trên tập số phức, các phương trình quy về bậc hai trên tập số thực và kỹ năng tính toán.

Ví dụ 1: Giải phương trình $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$ trên tập số phức. (**CD Khối A, B, D - 2010 (NC)**)

Hướng dẫn:

B1: Tính $\Delta = (1+i)^2 - 4(6+3i) = -24 - 10i = (1-5i)^2$

B2: Tìm một căn bậc hai của Δ : $\delta = 1 - 5i$

B3: Áp dụng công thức nghiệm: $z_1 = \frac{-B-\delta}{2A} = 3i, z_2 = \frac{-B+\delta}{2A} = 1-2i$.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\frac{4z-3-7i}{z-i} = z-2i$ (1) trên tập số phức. **CD Khối A,B,D – 2009**

(NC)

Hướng dẫn:

B1: Đặt đk $z \neq i$. Biến đổi đưa về pt bậc hai: **(1)** $\Leftrightarrow z^2 - (4+3i)z + 7i + 1 = 0$.

B2: Giải pt bậc 2 theo các bước ở VD 1, pt có 2 nghiệm $z_1 = 1+2i, z_2 = 3+i$.

Ví dụ 3: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$. **(Đề thi ĐH khối A – 2009)**

Hướng dẫn:

B1: Giải phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ có hai nghiệm phức là: $z_1 = -1-3i; z_2 = -1+3i$.

B2: Tính $|z_1|, |z_2|$: $|z_1| = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

B3: Thay kết quả vào biểu thức cần tính: $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 20$.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau trên tập số phức

a) $(z^2 + z)^2 - 4(z^2 + z) - 12 = 0$; b) $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$.

Hướng dẫn:

a) Đặt $t = z^2 + z$. **ĐS:** $z_1 = -2, z_2 = 1, z_3 = \frac{-1+\sqrt{23}i}{2}, z_4 = \frac{-1-\sqrt{23}i}{2}$

b) Nhận xét $z = 0$ không là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của pt cho z^2 và đặt $t = z - \frac{1}{z}$.

ĐS: $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, z_3 = 1+i, z_4 = 1-i$.

Bài tập tự luyện:

Bài 1. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $z^2 - 8(1-i)z + 63 - 16i = 0$. **ĐS:** $z_1 = 5-12i, z_2 = 3+4i$

b) $2(1+i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0$. **ĐS:** $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

c) $z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 1 = 0$. **ĐS:**
 $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, z_4 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 2. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 5z + 4 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$A = |z_1|^4 + |z_2|^4$.

Bài 3. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$A = |z_1|^3 + |z_2|^3$.

Bài 4. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 25 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left| \frac{1}{z_1} \right| + \left| \frac{1}{z_2} \right|.$$

Dạng 4: Dạng lượng giác của số phức

Các dạng toán thường gặp:

- Biểu diễn số phức từ dạng đại số sang dạng lượng giác và ngược lại.
- Thực hiện các phép nhân, chia và căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác.
- Bài toán ứng dụng công thức Moa-vơ.

Ví dụ 1: Viết số phức sau dưới dạng lượng giác $z = (1 + i\sqrt{3})(1 + i)$

Hướng dẫn: $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), 1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

$$\Rightarrow z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$$

Ví dụ 2: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \right)^3$. **ĐH Khối B – 2011 (NC)**

B1: Viết số phức $1 + i\sqrt{3}$ và $1 + i$ dưới dạng lượng giác:

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), 1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

B2: Sử dụng công thức Moivre và các phép toán dưới dạng lượng giác để biến đổi:

$$z = \frac{8(\cos \pi + i \sin \pi)}{2\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})} = 2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = 2 + 2i$$

B3: Kết luận: Phần thực 2, phần ảo 2

Nhận xét: Ví dụ 2 này ta có thể giải bằng cách biến đổi dưới dạng đại số. Tuy nhiên các ví dụ sau đây chúng ta phải sử dụng dạng lượng giác.

Ví dụ 3: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{(1 + i)^{12}}{(\sqrt{3} + i)^9}$.

Hướng dẫn: Thực hiện tương tự như Ví dụ 2.

Đáp số: Phần thực 0, phần ảo $-\frac{1}{8}$

Ví dụ 4: Biết rằng số phức z thỏa mãn $z + \frac{1}{z} = 1$. Hãy tính $A = z^{2012} + \frac{1}{z^{2012}}$

Hướng dẫn:

B1: Giải phương trình $z + \frac{1}{z} = 1$ ta tìm được nghiệm $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B2: Viết nghiệm dưới dạng lượng giác và sử dụng công thức Moivre tính z^{2012} và $\frac{1}{z^{2012}}$

B3: Suy ra kết quả $A = -1$

Bài tập tự luyện:

Bài 1. Cho số phức z thỏa mãn: $\bar{z} = \frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm môđun của $\bar{z} + iz$. **ĐH Khối A – 2010**

(NC)

Đáp số: $8\sqrt{2}$

Bài 2. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^5 i^3 (1 + \sqrt{3}i)^7$.

Đáp số: Phần thực $-64\sqrt{3}$, phần ảo -64

Bài 3. Biết rằng số phức z thỏa mãn $z + \frac{1}{z} = 1$. Hãy tính $A = z^{2010} + \frac{1}{z^{2010}}$

Đáp số: 2

Dạng 5: Nhị thức Newton và số phức

Các dạng toán thường gặp:

- Tính tổng các hệ số khai triển nhị thức Newton
- Chứng minh đẳng thức phụ thuộc và số tự nhiên

Để giải được dạng toán này học sinh cần nắm dạng lượng giác của số phức, công thức Moivre và khai triển nhị thức Newton.

Ví dụ 1: Tính tổng $S = C_{21}^0 - C_{21}^2 + C_{21}^4 - \dots + C_{21}^{16} - C_{21}^{18} + C_{21}^{20}$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n)

Hướng dẫn: Dùng công thức khai triển nhị thức Newton $(1+i)^{21}$:

$$(1+i)^{21} = (C_{21}^0 - C_{21}^2 + C_{21}^4 - \dots + C_{21}^{16} - C_{21}^{18} + C_{21}^{20}) + (C_{21}^1 - C_{21}^3 + C_{21}^5 - \dots + C_{21}^{17} - C_{21}^{19} + C_{21}^{21})i \quad (1)$$

Dùng công thức Moa-vơ:

$$(1+i)^{21} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{21} = (\sqrt{2})^{21} \left(-\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = -2^{10}(1+i) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $S = -2^{10}$

Chú ý: Bài toán trên cũng cho ta kết quả $C_{21}^1 - C_{21}^3 + C_{21}^5 - \dots + C_{21}^{17} - C_{21}^{19} + C_{21}^{21} = -2^{10}$.

Ví dụ 2: Với mọi số nguyên dương n, hãy chứng minh:
 $(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2 = 2^n$.

Hướng dẫn: Xét số phức $z = 1+i$

Dùng công thức khai triển nhị thức Newton $(1+i)^n$:

$$z^n = (1+i)^n = (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots) + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)i$$

$$\Rightarrow |z^n| = \sqrt{(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots)^2}$$

Mặt khác, $|z|^n = (\sqrt{2})^n$

Và $|z^n| = |z|^n$ suy ra đpcm.

Bài tập tự luyện:

Bài 1. Tính tổng $S = C_{2012}^1 - C_{2012}^3 + C_{2012}^5 - \dots + C_{2012}^{2009} - C_{2012}^{2011} + 1$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n)

HD: Khai triển nhị thức Newton $(1+i)^{2012}$.

Bài 2. Với mọi số nguyên dương n, hãy chứng minh:

$$(1 - C_{4n}^2 + C_{4n}^4 - C_{4n}^6 + \dots + C_{4n}^{4n})^2 + (C_{4n}^1 - C_{4n}^3 + C_{4n}^5 - C_{4n}^7 + \dots - C_{4n}^{4n-1})^2 = 16^n.$$

HD: Khai triển nhị thức Newton $(1+i)^{4n}$.

Bài 3. Cho số nguyên dương n.

1) Chứng minh rằng: $C_{2n}^0 - 3C_{2n}^2 + 9C_{2n}^4 - \dots + (-3)^n C_{2n}^{2n} = 2^{2n} \cos \frac{2n\pi}{3}$

2) Tính tổng $S = C_{20}^0 - 3C_{20}^2 + 3^2 C_{20}^4 - \dots + 3^{10} C_{20}^{20}$.

HD: Khai triển nhị thức Newton $(1 + \sqrt{3}i)^{2n}$.

KẾT LUẬN: Vì thời gian không cho phép, khuôn khổ tham luận có hạn nên chúng tôi chỉ đưa ra một số dạng cơ bản và mở rộng thường gặp của ba vấn đề nói trên. Trong lúc trình bày, có điều gì thiếu sót mong quý đồng nghiệp thông cảm, góp ý thêm.

Núi Thành, Ngày 22/03/2012
Tổ Toán – Tin, Trường THPT Nguyễn Huệ